จำนวนโฮโมมอร์ฟิซึมบนแลตทิสโซ่จำกัด และแลตทิสโซ่จำกัดไปยังแลตทิส M_n

ไพชยนต์ สิริเสถียรวัฒนา

มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร

ปีการศึกษา 2555

ไพชยนต์ สิริเสถียรวัฒนา :

จำนวนของโฮโมมอร์ฟิซึมบนแลตทิสโซ่จำกัดและแลตทิสโซ่จำกัดไปยังแลตทิสโซ่ M_n

โฮโมมอร์ฟิซึม//แลตทิสโซ่

งานวิจัยเรื่องนี้มีจุดมุ่งหมายที่จะศึกษาและหาจำนวนโฮโมมอร์ฟิซึมจากแลตทิสโซ่จำกัด Ch_m ไปยังแลตทิสโซ่จำกัด Ch_n และแลตทิสโซ่จำกัด Ch_m ไปยังและแลตทิส M_n โดยใช้สัมประสิทธิ์ทวินามซึ่งผลการวิจัยได้ต่อไปนี้ จำนวนโฮโมมอร์ฟิซึมของแลตทิสโซ่จำกัดความยาว m และ n คือ

$$hom(Ch_m, Ch_n) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{n} \binom{m+j-i-1}{j-i}$$

สำหรับ $i, j, m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ โดยที่ $0 \leq i \leq j \leq n$ และ

$$hom(Ch_m, Ch_n) = \binom{n+m+1}{n}$$

สำหรับจำนวนโฮโมมอร์ฟิซึมจากแลตทิสโซ่ Ch_m ไปยังแลตทิส M_n คือ

$$hom(Ch_m, M_n) = \binom{m+3}{m+1} + 3m\binom{n-1}{1}$$

สำหรับ $m, n \in \mathbb{N}$

PAICHAYON SIRISATIANWATTHANA

THE NUMBER OF HOMOMORPHISMS ON FINITE CHAIN LATTICE AND FINITE CHAIN LATTICE TO M_n

HOMOMORPHISM/CHAIN LATTICE/

The main purposes of study are: to study and to find the number of chain lattice homomorphisms fromthis finite chain lattice Ch_m to finite chain lattice Ch_n and finite chain lattice Ch_m to lattice M_n by using the binomial coefficients. The results are as follows:

The number fo chain lattice homomorphisms from finite chain lattice Ch_m to finite chain lattice Ch_n is

$$hom(Ch_m, Ch_n) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{n} \binom{m+j-i-1}{j-i},$$

where $i, j, m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ and $0 \leq i \leq j \leq n$. And

$$hom(Ch_m, Ch_n) = \binom{n+m+1}{n},$$

where $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

The number fo lattice homomorphisms from finite chain lattice Ch_m to lattice M_n is

$$hom(Ch_m, M_n) = \binom{m+3}{m+1} + 3m\binom{n-1}{1},$$

where $m, n \in \mathbb{N}$.

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยขอขอบคุณมหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร ที่ให้ทุนสนับสนุนในการทำวิจัย การค้นคว้าและอุปกรณ์ด้านอื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องกับงานวิจัย จึงทำให้งานวิจัยนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ด้วยดี

ผู้วิจัยขอขอบคุณคณาจารย์โปรแกรมวิชาคณิตศาสตร์ ที่สนับสนุนและให้กำลังใจตลอดระยะเวลาในการเรียน การทำงาน และการทำงานวิจัยนี้

สุดท้ายนี้ ผู้วิจัยขอขอบคุณบิดามารดาและครอบครัวที่ให้กำลังใจตลอดการทำงานวิจัยชิ้นนี้

ไพชยนต์ สิริเสถียรวัฒนา

สารบัญ

สารบัญตาราง

สารบัญรูป

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหา

งานวิจัยเรื่องนี้จะศึกษาเกี่ยวกับการหาจำนวนเอนโดมอร์ฟิซึมบนแลตทิสโซ่ สิ่งที่ดลใจให้ผู้วิจัยมีความสนใจที่จะศึกษาเนื่องมาจากได้ทำการศึกษาเกี่ยวกับการหาจำนวนเอนโดมอร์ฟิซึม โฮโมมอร์ฟิซึม และเอกามอร์ฟิซึมบนกราฟของบุคคลต่อไปนี้

นิรุตติ์ พิพรรธนจินดา (2549) ได้ทำการวิจัยเรื่อง การหาจำนวนฟังก์ชันของฟังก์ชันโฮโมมอร์ฟิซึมของกราฟวงจร พบว่าจำนวนฟังก์ชันโฮโมมอร์ฟิซึมคือ $hom(C_m, C_n) = n\sum_{t=0}^{q+1}\binom{m}{\frac{m\pm nt}{2}}$ โดยที่ m, n, q, r เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่ง $m, n \geq 3, 0 \leq r \leq n-1, q \geq 0$ และ $m-1 = nq + r$

ศรีจันทร์ อาวรณ์ (2551) ได้วิจัยในเรื่องขั้นตอนวิธีการหาจำนวนของฟังก์ชันเอนโดมอร์ฟิซึมบนกราฟวิถีและขั้นตอนวิธีการหาจำนวนฟังก์ชันโฮโมมอร์ฟิซึมบนกราฟวิถี พบว่าจำนวนเอนโดมอร์ฟิซึมบนกราฟวิถีเท่ากับ

$$end(P_n) = \sum_{u=\lceil \frac{n-i}{2}\rceil}^{n-\lceil \frac{i}{2}\rceil}\binom{n}{u} - \sum_{u=0}^{\lfloor n-\frac{i}{2}\rfloor-1}\binom{n}{u} - \sum_{u=n-\lfloor \frac{i}{2}\rfloor+1}^{n}\binom{n}{u}$$

สำหรับ $0 \leq i \leq n$ และจำนวนฟังก์ชันโฮโมมอร์ฟิซึมบนวิถีมีจำนวนเท่ากับ

$$hom(P_m, P_n) = \sum_{t=-m}^{m}(-1)^t\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\binom{m}{\frac{m-i+t\cdot(n+2)+j}{2}}$$

ไพชยนต์ สิริเสถียรวัฒนา (2552) ได้หาจำนวนเอกามอร์ฟิซึมบนวิถีไม่ระบุทิศทาง ซึ่งได้จำนวนเอกามอร์ฟิซึมเป็นดังนี้ สำหรับ $0 \leq i, j \leq n$, แล้ว จะได้ว่า

$$ega(P_m, P_n) = \sum_{t=-m}^{m}(-1)^t\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\binom{m}{t\cdot(n+2)-i+j}_2$$

ไพชยนต์ สิริเสถียรวัฒนาและนิรุตติ์ พิพรรธนจินดา (2553) ได้หาจำนวนเอกามอร์ฟิซึมบนวงจร ดังนี้คือ กำหนดให้ $m, n \in \mathbb{Z}^+$, $m, n \geq 3$ ถ้า $m - 1 = nq + r$ สำหรับบาง $q \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, $0 \leq r \leq n - 1$ แล้ว จะได้ว่า

1. $ega(C_m, C_n) = n\sum_{t=0}^{q+1}\binom{m}{\pm nt}_2$,
2. $ega(C_m) = n[\binom{m}{0}_2 + 2]$

วิไลวรรณ กระต่ายทอง (2555) ได้หาจำนวนเอนโดมอร์ฟิซึมบนแลตทิสโซ่จำกัดไปยังแลตทิสโซ่จำกัด ซึ่งผลการวิจัยได้จำนวนเอนโดมอร์ฟิซึมของแลตทิสโซ่ความยาว n เป็นดังนี้ สำหรับ $m, n \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}, 0 \leq i \leq j$จะได้ว่า

$$end(ch_n) = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n+j-i-1}{j-i}$$

และสำหรับแลตทิสโซ่จำกัดที่มีความยาว n และ m จุด จะได้ว่า จำนวนเอนโดมอร์ฟิซึม คือ

$$end(ch_n^m) = \binom{m+n}{n}$$

โดยเฉพาะงานวิจัยเรื่องท้ายสุดเป็นสิ่งกระตุ้นให้ผู้วิจัยมีความสนใจที่จะนำสิ่งที่ได้จากการศึกษาไปใช้ในการหาจำนวนโฮโมมอร์ฟิซึมและจะได้นำไปใช้ในการหาความสัมพันธ์อื่น ๆ ที่เกี่ยวข้องกับโฮโมมอร์ฟิซึมต่อไป

งานวิจัยนี้มีด้วยกันทั้งหมด 4 บท ในบทที่ 1 จะกล่าวถึงแรงจูงใจและความสนใจของผู้วิจัยในเรื่องนี้ วัตถุประสงค์ ขอบเขตการวิจัยและผลที่คาดว่าจะได้รับหลังจากงานวิจัยเสร็จสิ้นแล้ว บทที่ 2 จะกล่าวถึงความรู้พื้นฐาน นิยามและทฤษฎีที่เกี่ยวข้องและเป็นเครื่องมือสำคัญในการพิสูจน์ผลลัพธ์การส่งที่เป็นเอนโดมอร์ฟิซึม โฮโมมอร์ฟิซึม และไอโซมอร์ฟิซึม บทที่ 3 จะเป็นการหาจำนวนโฮโมมอร์ฟิซึมและการพิสูจน์ผลลัพธ์ที่ได้และตัวอย่างการคำนวณจำนวนเอนโดมอร์ฟิซึมด้วยโปรแกรมสำเร็จรูปทางคณิตศาสตร์ บทสุดท้ายจะเป็นบทสรุปและข้อเสนอแนะ

1.2 วัตถุประสงค์การวิจัย

1. ศึกษาสมบัติ ทฤษฎี และความสัมพันธ์ของโฮโมมอร์ฟิซึม

2. หาจำนวนโฮโมมอร์ฟิซึมบนแลตทีสโซ่จำกัดและแลตทีสโซ่จำกัดไปยังแลตทีส M_n

1.3 ขอบเขตการวิจัย

งานวิจัยนี้จะศึกษาโฮโมมอร์ฟิซึมบนแลตทีสโซ่จำกัดและแลตทีสโซ่จำกัด Ch_m ไปยังแลตทีส M_n

1.4 เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

1. สัมประสิทธิ์ทวินาม (Binomial Coefficients)
2. จำนวนเชิงสาม (Triangular Numbers)

1.5 ผลที่คาดว่าจะได้รับ

1. ทฤษฎีที่เกี่ยวกับโฮโมมอร์ฟิซึม
2. สูตรคำนวณจำนวนโฮโมมอร์ฟิซึมจากแลตทีสโซ่จำกัด Ch_m ไปยังแลตทีสโซ่จำกัด Ch_n และแลตทีสโซ่จำกัด Ch_m ไปยังแลตทีส M_n กับ แลตทีส M_n ไปยังแลตทีสโซ่จำกัด Ch_m
3. ตีพิมพ์ในวารสารทางด้านคณิตศาสตร์
4. นำเสนอในเวทีการประชุมเชิงวิชาการทางด้านคณิตศาสตร์ระดับชาติหรือนานาชาติ

บทที่ 2
ความรู้พื้นฐาน

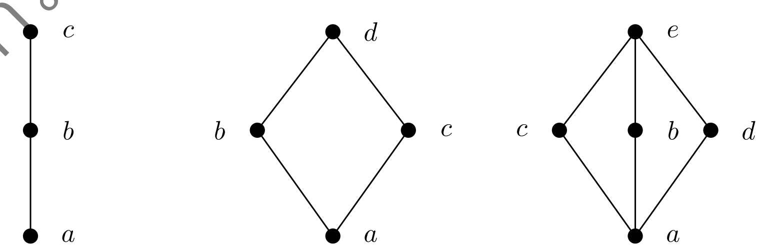
ในบทนี้จะกล่าวถึงนิยามและทฤษฎีบทที่เกี่ยวข้องแลตทีส และชนิดของแลตทีสที่จะใช้ในการวิจัยครั้งนี้

นิยาม 2.1 *จะเรียก L ว่า แลตทีส ถ้า L เป็นเซตอันดับ(อันดับบางส่วน) ซึ่งมี "$\leq$" เป็นการอันดับบางส่วนบน L ที่สอดคล้องกับเงื่อนไขต่อไปนี้*

1. $\forall x(x \leq x)$
2. $\forall x \forall y(x \leq y \wedge y \leq x \Rightarrow x = y)$
3. $\forall x \forall y \forall z(x \leq y \wedge y \leq z \Rightarrow x \leq z)$

และทุก ๆ คู่สมาชิกจะต้องมีขอบบนน้อยที่สุด (supremum) และขอบล่างมากที่สุด (infimum)

ตัวอย่าง 2.1 *เซตอันดับ M_n (สำหรับ $n \geq 1$) ที่เป็นแลตทีส*

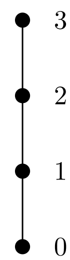


รูปที่ 2.1: ตัวอย่างเซตอันดับที่เป็นแลตทีส

จากรูปที่ 2.1 จะเห็นว่าทุก ๆ คู่สมาชิกใด ๆ สำหรับ $x, y \in M_n$ กับคู่สมาชิกที่ไม่สามารถเปรียบเทียบกันได้นั้นมีขอบบนน้อยที่สุดและขอบล่างมากที่สุดทุกคู่

นิยาม 2.2 *ให้ P เป็นเซตอันดับ(Ordered set) เซตหนึ่ง จะเรียก P ว่า โซ่ ถ้า สำหรับทุก $x, y \in P$ สามารถเปรียบเทียบกันได้ นั่นคือ $x \leq y$ หรือ $y \leq x$*

ตัวอย่าง 2.2 *แลตทิสโซ่ที่มีความยาว 3*



รูปที่ 2.2: แลตทิสโซ่ความยาว 3 (ch_3)

นิยาม 2.3 *ให้ L และ K เป็นแลตทิส จะเรียก ฟังก์ชัน $f : L \to K$ ว่า โฮโมมอร์ฟิซึม (หรือแลตทิสโฮโมมอร์ฟิซึม) ถ้า f คงสภาพ $\sup f$ (join-preserving เขียนแทนด้วย $a \vee b$ สำหรับ $a, b \in L$) และ $\inf f$ (meet-preserving เขียนแทนด้วย $a \wedge b$ สำหรับ $a, b \in L$) นั่นคือ สำหรับทุก $a, b \in L$*

$$f(a \vee b) = f(a) \vee f(b) \text{ และ } f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$$

จากนิยาม 2.2 ถ้า ฟังก์ชัน f เป็นฟังก์ชันที่ส่งจากแลตทิส L ไปยังแลตทิส L แล้วจะเรียก f ว่า **เอนโดมอร์ฟิซึมแลตทิส** หรือจะกล่าวได้ว่า $f : L \to L$ คงสภาพทั้ง inf (meet) และ sup (joint)

ทฤษฎีสำคัญที่เกี่ยวข้องกับโฮโมมอร์ฟิซึม

ทฤษฎีบท 2.1 *(B.A., Davey and H.A. Priestley(2002)) ให้ L และ K เป็นแลตทิส และ $f : L \to K$ จะได้ว่า*

(i) ข้อความต่อไปนี้สมมูลกัน

(a) f คงสภาพอันดับ

(b) สำหรับทุก $a, b \in L$ จะได้ว่า $f(a \vee b) \geq f(a) \vee f(b)$

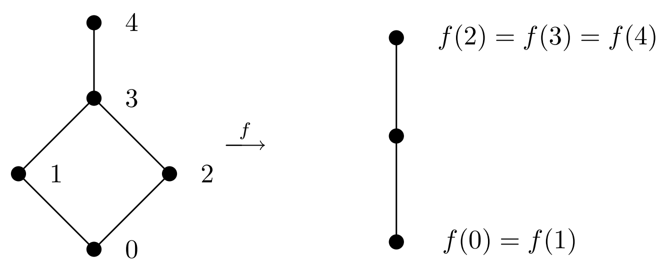
(c) สำหรับทุก $a, b \in L$ จะได้ว่า $f(a \wedge b) \leq f(a) \wedge f(b)$

โดยทั่วไป ถ้า f เป็นโฮโมมอร์ฟิซึมแล้ว f คงสภาพอันดับ

(ii) f เป็นไอโซมอร์ฟิซึม ก็ต่อเมื่อ f เป็นไอโซมอร์ฟิซึมอันดับ

ในลำดับต่อไปจะนำเสนอตัวอย่างสำหรับการส่งที่เป็นโฮโมมอร์ฟิซึม

ตัวอย่าง 2.3 *การส่งที่เป็นโฮโมมอร์ฟิซึม*



รูปที่ 2.3: ลักษณะการส่งของฟังก์ชัน f ที่เป็นโฮโมมอร์ฟิซึม

บทตั้ง 2.1 *ให้ L เป็นแลตทีสและสำหรับ $a, b \in L$ จะได้ว่าสมบัติต่อไปนี้สมมูลกัน*

(i) $a \leq b$;

(ii) $a \vee b = b$;

(ii) $a \wedge b = a$.

สำหรับการพิสูจน์สามารถดูได้จากหนังสือ Introduction to Lattices and Order(Davey, B.A. and Priestley, H.A.(2002))

2.1 สัมประสิทธิ์ทวินามและเอกลักษณ์

นิยาม 2.4 สำหรับ $m \in Z^{+} \cup \{0\}$ และ $k \in Z$,

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-k)!k!} & \text{ถ้า } n \geq k \\ 0 & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

จากนิยาม 2.4 จะขอนำเสนอเอกลักษณ์ของสัมประสิทธิ์ทวินามที่สำคัญและจำเป็นสำหรับการพิสูจน์ทฤษฎีบทในวิจัยนี้ คือ

$$\binom{n+0}{0} + \binom{n+1}{1} + \binom{n+2}{2} + \cdots + \binom{n+j}{j} = \binom{n+1+j}{j} \tag{2.1}$$

และสำหรับทุกจำนวนเต็ม $n, k \geq 0$ จะได้ว่า

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} \tag{2.2}$$

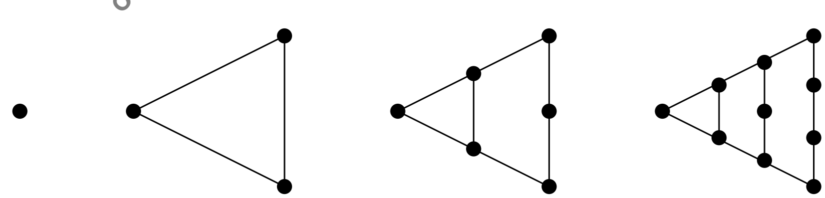
กับค่าเริ่มต้น คือ

$$\binom{n}{1} = n \ \text{ สำหรับทุกจำนวนเต็ม } n \geq 0 \text{ และ}$$
$$\binom{0}{k} = 0 \ \text{ สำหรับทุกจำนวนเต็ม } k > 0$$

2.2 จำนวนเชิงสามเหลี่ยม (Triangular Numbers)

ในหัวข้อนี้จะกล่าวถึงจำนวนเชิงสามเหลี่ยม (Triangular Numbers) เป็นเครื่องมือสำคัญสำหรับการคำนวณหาจำนวนฟังก์ชันโฮโมมอร์ฟิซึม โดยมีนิยาม (Weisstein, Eric W. "Triangular Numbers." From MathWorld–A Wolfram Web Resource.http://mathworld. wolfram.com/TriangularNumbers.html) ดังนี้

จำนวนเชิงสามเหลี่ยมเป็นจำนวนเชิงรูป (figurate numbers) ซึ่งเขียนในรูปของจำนวนกริดเชิงสามเหลี่ยมของจุด โดยที่แถวแรกจะบรรจุจุดเดียวสำหรับแถวถัดไปเรื่อย ๆ จะบรรจุจุดมากกว่าแถวแรกหนึ่งจุดเป็นลักษณะแบบนี้ไปเรื่อย ๆ ดังนี้



รูปที่ 2.4: จำนวนเชิงสามเหลี่ยม

นั่นคือ $T_1 = 1, T_2 = 3, \ldots$ และจำนวนเชิงสามเหลี่ยมเกิดจากจำนวนกริดในรูปสามเหลี่ยมก็คือ $1, 1+2, 1+2+3, 1+2+3+4, \ldots$ ดังนั้น จำนวนเชิงสามเหลี่ยมจะเป็น $1, 3, 6, 10, 15, \ldots$.

สำหรับรูปทั่วไปจำนวนเชิงสามเหลี่ยมได้มาจากการบวกจำนวนเต็มบวกที่น้อยกว่าหรือ

เท่ากับจำนวนเต็มบวกที่กำหนดมาให้ นั่นคือ

$$
\begin{aligned}
T_n &= \sum_{k=1}^{n} k \\
&= \frac{1}{2}n(n+1) \\
&= \binom{n+1}{2}
\end{aligned}
$$

โดยที่ $\binom{n}{k}$

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	$\cdots$	k
0	1	0	0	0	0	0	0	$\cdots$	0
1	1	1	1	1	1	1	1	$\cdots$	$\binom{n+k-1}{0}$
2	1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$	$\binom{n+k-1}{1}$
3	1	3	6	10	15	21	28	$\cdots$	$\binom{n+k-1}{2}$
4	1	4	10	20	35	56	84	$\cdots$	$\binom{n+k-1}{3}$
5	1	5	15	35	70	126	209	$\cdots$	$\binom{n+k-1}{4}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
n	$\binom{n+k-1}{0}$	$\binom{n+k-1}{1}$	$\binom{n+k-1}{2}$	$\binom{n+k-1}{3}$	$\binom{n+k-1}{4}$	$\binom{n+k-1}{5}$	$\binom{n+k-1}{6}$	$\cdots$	$\binom{n+k-1}{k}$

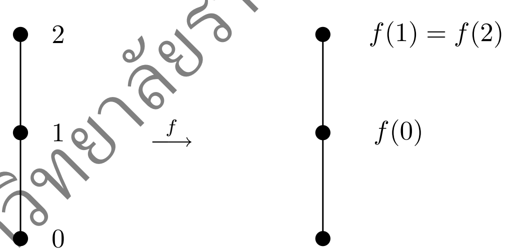
ตารางที่ 2.1: ตารางจำนวนเชิงสามเหลี่ยม

บทที่ 3
จำนวนฟังก์ชันโฮโมมอร์ฟิซึมบนแลตทีสโซ่

ในบทนี้ผู้วิจัยจะกล่าวถึงวิธีการและขั้นตอนในการหาจำนวนฟังก์ชันของฟังก์ชันโฮโมมอร์ฟิซึมบนแลตทีสโซ่โดยเริ่มต้นนี้จะนำเสนอหลักการและวิธีการนับจำนวนฟังก์ชันโฮโมมอร์ฟิซึม

3.1 หลักการและวิธีการนับจำนวนฟังก์ชันโฮโมมอร์ฟิซึม

จากนิยาม 2.2 และการส่งดังตัวอย่าง 2.3 ในบทที่ 2 เราจะแสดงลักษณะการส่งของฟังก์ชัน f ที่เป็นฟังก์ชันโฮโมมอร์ฟิซึมจากแลตทีสโซ่ความยาว 2 (Ch_2) ไปยังแลตทีสโซ่ความยาว 2 (Ch_2) ที่ f ส่งจุด 0 ไปยังจุด 1 ดังรูป



รูปที่ 3.1: แลตทีสโฮโมมอร์ฟิซึมของ Ch_2 ไปยัง Ch_2

จากตัวอย่างการส่งดังกล่าวเราจะนับเป็นหนึ่งฟังก์ชัน สังเกตว่าถ้าเปลี่ยนจากการจับคู่ ของ $f(1) = f(2)$ มาอยู่ที่จุด 1 ก็จะได้อีกหนึ่งฟังก์ชันที่เป็นฟังก์ชันโฮโมมอร์ฟิซึม ดังนั้นถ้าเราดำเนินการลักษณะนี้กับจุดอื่น ๆ โดยเปลี่ยนการจับคู่ของจุด $f(0)$ เราจะได้จำนวนฟังก์ชันโฮโมมอร์ฟิซึมทั้งหมด 10 ฟังก์ชัน จากวิธีการนับดังกล่าวเราสามารถหาจำนวนฟังก์ชัน f ที่ส่งจุด 0 ไปยังแต่ละจุดได้ตามต้องการและนำไปหาจำนวนโฮโมมอร์ฟิซึมจาก Ch_n ไปยัง Ch_m ต่อไป

เพื่อให้เกิดความเข้าใจและง่ายต่อการพิสูจน์วิจัยเรื่องนี้จะใช้สัญลักษณ์ต่อไปนี้

$Hom^i_j(Ch_m, Ch_n)$ แทน เซตของโฮโมมอร์ฟิซึมซึ่งมีฟังก์ชัน f ส่งจาก Ch_m ไปยัง Ch_n โดยที่ f ส่ง 0 ไปยัง i และส่ง m ไปยัง j ($f(0) = i$ และ $f(m) = j$)

$Hom^i(Ch_m, Ch_n)$ แทน เซตของโฮโมมอร์ฟิซึมทั้งหมดจากกราฟวิถี Ch_m ไปยังCh_n โดยที่ f ส่ง 0 ไปยัง i ($f(0) = i$)

$hom^i_j(Ch_m, Ch_n)$ แทนจำนวนโฮโมมอร์ฟิซึมในตำแหน่งที่ f ส่ง 0 ไปยัง i และส่ง m ไปยัง j

$hom^i(Ch_m, Ch_n)$ แทนจำนวนโฮโมมอร์ฟิซึมทั้งหมดที่ f ส่ง 0 ไปยัง i

$hom(Ch_m, Ch_n)$ แทนจำนวนโฮโมมอร์ฟิซึมทั้งหมดที่ส่งจาก Ch_m ไปยัง Ch_n

จากการศึกษาและการพิจารณาการนับจำนวนโฮโมมอร์ฟิซิมตามวิธีการที่ได้กล่าวมานั้น ทำให้เราได้สูตรที่ช่วยในการคำนวณจำนวนโฮโมมอร์ฟิซึมในแต่ละตำแหน่งในรูปของสูตรสัมประสิทธิ์ทวินาม คือ $hom^i_j(Ch_m, Ch_n) = \binom{m+j-i-1}{j-i}, (j = n)$ สำหรับ $0 \leq i \leq j \leq n$ และจำนวนฟังก์ชันเอนโดมอร์ฟิซึมทั้งหมดที่ซึ่งมีฟังก์ชัน f ส่ง 0 ไปยังแต่ละ i คือ $hom^i(Ch_m, Ch_n) = \sum\limits_{j=i}^{n} hom^i_j(Ch_m, Ch_n) = \sum\limits_{j=i}^{n} \binom{m+j-i-1}{j-i}$

การได้มาของสูตรดังกล่าวนี้ผู้เขียนจะเริ่มต้นด้วยการนำเสนอในสิ่งที่ได้จากบทนิยามของโฮโมมอร์ฟิซึมจากแลตตีสโซ่ Ch_m ไปยัง Ch_n นั่นคือ

ทฤษฎีบท 3.1 สำหรับ $m, n, i, j, k, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ถ้า f เป็นฟังก์ชันที่ส่งจากแลตทีสโซ่ Ch_m ไปยังแลตทีสโซ่ Ch_n แล้วจะได้ว่า

1. ถ้า $j \neq k$ แล้ว $Hom^i_k(Ch_m, Ch_n) \bigcap Hom^i_j(Ch_m, Ch_n) = \varnothing$
2. ถ้า $i \neq r$ แล้ว $Hom^i(Ch_m, Ch_n) \bigcap Hom^r(Ch_m, Ch_n) = \varnothing$
3. $hom^i(Ch_m, Ch_n) = \sum\limits_{j=i}^{n} hom^i_j(Ch_m, Ch_n)$
4. $hom(Ch_m, Ch_n) = \sum\limits_{i=0}^{n} hom^i(Ch_m, Ch_n)$

ในหัวข้อต่อไปเราจะนำเสนอบทตั้งและทฤษฎีที่เกี่ยวข้องกับการการคำนวณหาจำนวนโฮโมมอร์ฟิซึมบน Ch_m ไปยัง Ch_n โดยที่ $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

3.2 จำนวนโฮโมมอร์ฟิซึมจากแลตทีส Ch_m ไปยังแลตทีส Ch_n

ในหัวข้อนี้เราจะนำเสนอบางสมบัติและทฤษฎีบทพื้นฐานของโฮโมมอร์ฟิซึมบนแลตทีสโซ่ และจะใช้แนวความคิดเหล่านี้ในการสร้างสูตรทั่วไปสำหรับการหาจำนวนโฮโมมอร์ฟิซึม

ข้อสังเกตจากตาราง 2.1 ทำให้เราได้บทตั้งต่อไปนี้

บทตั้ง 3.1 สำหรับ $i, j, m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ โดยที่ $0 \leq i \leq j \leq n$ ถ้า $m = 0$ จะได้ว่า

$$hom^i_j(Ch_0, Ch_n) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } i = j; \\ 0 & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

พิสูจน์ เนื่องจาก $m = 0$ นั่นคือ แลตทีสโซ่ตัวแรก(โดเมนของ f) มีเพียงจุดเดียว ดังนั้น f สามารถส่งไปยังอีกแลตทีสโซ่(เรนจ์ของ f) และเป็นฟังก์ชันได้เพียงจุดเดียวคือจุดที่ $i = j$ (ตามความหมายสัญลักษณ์ $hom^i_j(Ch_M, Ch_n)$)

บทตั้ง 3.2 สำหรับ $i, j, m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ โดยที่ $0 \leq i \leq j \leq n$ ถ้า $n = 0$ จะได้ว่า

$$hom^i_j(Ch_m, Ch_0) = \begin{cases} 1 & \text{ถ้า } i = j = 0; \\ 0 & \text{อื่น ๆ} \end{cases}$$

พิสูจน์ เนื่องจาก $n = 0$ นั่นคือเรนจ์ของ f มีเพียงจุดเดียว และจาก $0 \leq i \leq j \leq n$ ทำให้ $i = j = 0$ นั่นคือ ไม่ว่าโดเมนของแลตทีสโซ่จะมี m จุด ก็มีเพียงฟังก์ชันเดียว เพราะฉะนั้นมีโฮโมมอร์ฟิซึมเพียง 1 ฟังก์ชัน

ในลำดับต่อไปจะแสดงการคำนวณจำนวนโฮโมมอร์ฟิซึมทั้งหมดบนแลตทีสโซ่ที่มีความยาว m และ n ที่ $f(0) = 0$ เขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $hom^0(Ch_m, Ch_n)$ เมื่อ $m \leq 4$ และ $n \leq 5$ ดังตารางด้านล่างนี้

$m \backslash n$	0	1	2	3	4	5
0	1	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1
2	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	6
3	1	3	6	10	**15**	21
4	1	4	10	20	35	56

ตารางที่ 3.1: แสดงจำนวนโฮโมมอร์ฟิซึมที่มีความยาว $m \leq 4$ และ $n \leq 5$

โดยนิยาม 2.3 และด้วยหลักการและวิธีการนับเราจะได้ว่า $hom^0(Ch_2, Ch_4) = 15$ ดังนั้น ถ้าเราพิจารณาจากตาราง 3.1 ก็คือ 15 ในแถวที่ 4 และหลักที่ 5 ซึ่งเกิดจากผลรวมของตัวเลข $1, 2, 3, 4$ และ 5 (ตัวหนา) ของแถวที่ 3 แต่เนื่องจากตัวเลขดังกล่าวคือ จำนวนโฮโมมอร์

ฟิซึมที่ส่ง $f(0) = 0$ และ $f(2) = j$ นั่นคือ $hom_0^0(Ch_2, Ch_4),\ hom_1^0(Ch_2, Ch_4), \ldots$ $\ldots, hom_4^0(Ch_2, Ch_4)$ ตามลำดับ

ในทำนองเดียวกันจะสังเกตได้ว่าสำหรับจำนวนอื่น ๆ ก็คำนวณได้ด้วยวิธีการเดียวกันนี้ เช่น จะได้ว่า $hom^0(Ch_2, Ch_3) = 10$ และ $hom^0(Ch_2, Ch_2) = 6$ เป็นต้น และด้วยแนวคิดนี้ทำให้เราได้ว่าทฤษฎีบทต่อไปนี้

บทตั้ง 3.3 สำหรับ $i, j, m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ โดยที่ $0 \le i \le j \le n$ ถ้า

$$hom_j^i(Ch_m, Ch_n) = \sum_{j=i}^{n} hom_j^i(Ch_{m-1}, Ch_n)$$

สำหรับแต่ละค่าที่ได้นำเสนอและแต่ละค่าในตาราง 3.1 สามารถเขียนอยู่ในรูปสัมประสิทธิ์ทวินามและทำให้เราได้สูตรในการคำนวณจำนวนโฮโมมอร์ฟิซึม ดังทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.2 สำหรับ $i, j, m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ โดยที่ $0 \le i \le j \le n$ จะได้ว่า

$$hom_j^i(Ch_m, Ch_n) = \binom{m+j-i-1}{j-i}, (j = n)$$

พิสูจน์ เราจะพิสูจน์โดยอุปนัยเชิงคณิตศาสตร์ เพราะฉะนั้นโดยบทตั้ง 3.3 และ บทตั้ง 3.1 จะได้ว่า

$$\begin{aligned} hom_j^i(Ch_1, Ch_n) &= \sum_{j=i}^{n} hom_j^i(Ch_0, Ch_n) \\ &= hom_i^i(Ch_0, Ch_n) \\ &= 1 \\ &= \binom{1+j-i-1}{j-i} \end{aligned}$$

เราจะสมมติว่า $hom^i_j(Ch_m, Ch_n) = \binom{m+j-i-1}{j-i}$ เป็นจริงสำหรับค่า m เราต้องการพิสูจน์ว่า ที่ $m+1$ ก็เป็นจริงด้วย เพราะฉะนั้นโดยบทตั้ง 3.3 และสมการ (2.1),

$$\begin{aligned}
hom^i_j(Ch_{m+1}, Ch_n) &= \sum_{j=i}^{n} hom^i_j(Ch_m, Ch_n) \\
&= hom^i_i(Ch_m, Ch_n) + hom^i_{i+1}(Ch_m, Ch_n) + \cdots + hom^i_j(Ch_m, Ch_n)(j=n) \\
&= \binom{m+i-i-1}{i-i} + \binom{m+i+1-i-1}{i+1-i} + \cdots + \binom{m+j-i-1}{j-i} \\
&= \binom{(m-1)+i-i}{i-i} + \binom{(m-1)+i+1-i}{i+1-i} + \cdots + \binom{(m-1)+j-i}{j-i} \\
&= \binom{(m-1)+0}{0} + \binom{(m-1)+1}{1} + \cdots + \binom{(m-1)+j-i}{j-i} \\
&= \binom{m+j-i}{j-i}
\end{aligned}$$

บทแทรก 3.1 สำหรับ i, j, m และ $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ โดย $0 \le i \le j \le n$ จะได้ว่า

$$hom^i(Ch_m, Ch_n) = \sum_{j=i}^{n} \binom{m+j-i-1}{j-i}$$

และ

$$hom(Ch_m, Ch_n) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{n} \binom{m+j-i-1}{j-i}$$

ตัวอย่าง 3.1 การคำนวณจำนวณโฮโมมอร์ฟิซึมจากแลตทีสโซ่ที่มีความยาว 3 ไปยังแลตทีสโซ่ที่มีความยาว 4

f map 0 to 0 และส่ง 0 ไปยัง 1

n\j	0	1	2	3	4	$hom^0_j(Ch_3, Ch_4)$
0	1	0	0	0	0	
1	1	1	1	1	1	
2	1	2	3	4	5	
3	1	3	6	10	15	$\Rightarrow$ **35**

n\j	0	1	2	3	4	$hom^1_j(Ch_3, Ch_4)$
0	0	1	0	0	0	
1	0	1	1	1	1	
2	0	1	2	3	4	
3	0	1	3	6	10	$\Rightarrow$ **20**

f ส่ง 0 ไปยัง 2 และส่ง 0 ไปยัง 3

n\j	0	1	2	3	4	$hom^2_j(Ch_3, Ch_4)$
0	0	0	1	0	0	
1	0	0	1	1	1	
2	0	0	1	2	3	
3	0	0	1	3	6	$\Rightarrow$ **10**

n\j	0	1	2	3	4	$hom^3_j(Ch_3, Ch_4)$
0	0	0	0	1	0	
1	0	0	0	1	1	
2	0	0	0	1	2	
3	0	0	0	1	3	$\Rightarrow$ **4**

f ส่ง 0 ไปยัง 4

n\j	0	1	2	3	4	$hom^4_j(Ch_3, Ch_4)$
0	0	0	0	0	1	
1	0	0	0	0	1	
2	0	0	0	0	1	
3	0	0	0	0	1	$\Rightarrow$ **1**

จากการคำนวณทั้งหมดทำให้ได้จำนวนโฮโมมอร์ฟิซึมบนแลตทีสที่มีความยาว 3 และ 4 คือ $hom(Ch_3, Ch_4) = \sum_{i=0}^{4} hom^i(Ch_3, Ch_4) = 1 + 4 + 10 + 20 + 35 = 70$

3.3 จำนวนโฮโมมอร์ฟิซึมบนแลตทีสโซ่ในรูปจำนวนเชิงสามเหลี่ยม

จากการคำนวณจำนวนโฮโมมอร์ฟิซึมที่ได้นำเสนอในหัวข้อ 3.2 ทำให้เราได้จำนวนโฮโมมอร์ฟิซึมที่คำนวณโดยสูตรตามบทแทรก 3.1 และสามารถเขียนจำนวนโฮโมมอร์ฟิซึมเหล่านั้นลงในตารางดังต่อไปนี้

$m\backslash n$	0	1	2	3	4	$\cdots$	n
0	1	2	3	4	5	$\cdots$	$\binom{n+1}{1}$
1	1	3	6	10	15	$\cdots$	$\binom{n+2}{2}$
2	**1**	**4**	**10**	**20**	**35**	$\cdots$	$\binom{n+3}{3}$
3	1	5	15	35	**70**	$\cdots$	$\binom{n+4}{4}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
m	$\binom{m+1}{0}$	$\binom{m+2}{1}$	$\binom{m+3}{2}$	$\binom{m+4}{3}$	$\binom{m+5}{4}$	$\cdots$	$\binom{n+m+1}{n}$

ตารางที่ 3.2: จำนวนโฮโมมอร์ฟิซึมของ Ch_m ไปยัง $Ch_n, hom(Ch_m, Ch_n)$

พิจารณาจากตาราง 3.2 ($hom(Ch_m, Ch_n)$) ทำให้เราได้ข้อความจริงต่อไปนี้

บทตั้ง 3.4 สำหรับ $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ จะได้ว่า

(i) $hom(Ch_m, Ch_0) = \binom{n}{0} = 1$

(ii) $hom(Ch_0, Ch_n) = \binom{n+1}{1} = n + 1$

จะเห็นได้ว่ามีลักษณะที่คล้ายกับแนวคิดจำนวนเชิงสามเหลี่ยมทำให้เราสามารถคำนวณจำนวนโฮโมมอร์ฟิซึม $hom(Ch_3, Ch_4)$ ดังตัวเลขที่เป็นตัวหนาในตาราง 3.2 ด้วยแนวคิดนี้ทำให้เราได้จำนวนโฮโมมอร์ฟิซึม ดังบทตั้งต่อไปนี้

บทตั้ง 3.5 สำหรับ $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ และ $n = m + 1$ จะได้ว่า

$$hom(Ch_m, Ch_n) = hom(Ch_{m-1}, Ch_0) + hom(Ch_{m-1}, Ch_1) + \cdots + hom(Ch_{m-1}, Ch_n)$$

และจากบทตั้ง 3.5 ทำให้เราได้สูตรในการคำนวณจำนวนโฮโมมอร์ฟิซึมในแต่ละตำแหน่งสามารถเขียนให้อยู่ในรูปคล้ายจำนวนเชิงสามเหลี่ยมดังทฤษฎีต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.3 สำหรับ $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ จะได้ว่าจำนวนโฮโมมอร์ฟิซึมของแลตทีสโซ่ Ch_m ไปยัง Ch_n คือ

$$hom(Ch_m, Ch_n) = \binom{n+m+1}{n} \tag{3.1}$$

พิสูจน์: ถ้า $m = 0$ สำหรับ $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ จะได้ว่าเป็นจริงตามบทตั้ง 3.4 เราจะสมมุติว่าสำหรับแลตทีสที่มีความยาว m สำหรับ $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ เป็นจริง เราต้องการพิสูจน์ว่า $m + 1$ สำหรับ $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ก็จริงด้วย เพราะฉะนั้นโดยบทตั้ง 3.5 และ (2.1) เราได้ว่า

$$\begin{aligned} hom(Ch_{m+1}, Ch_n) &= hom(Ch_m, Ch_0) + hom(Ch_m, Ch_1) + \cdots + hom(Ch_m, Ch_n) \\ &= \binom{m+1+0}{0} + \binom{m+1+1}{1} + \cdots + \binom{n+m+1}{n} \\ &= \binom{(m+1)+1+n}{n} \\ &= \binom{n+(m+1)+1}{n} \end{aligned}$$

เมื่อ $n = m + 1$

จากทฤษฎี 3.3 ทำให้เราได้ว่าสูตรต่อไปนี้ก็ยังเป็นจริงสำหรับ $n = m + 1$ นั่นคือ

$$hom(Ch_m, Ch_n) = \binom{2(m+1)}{m+1} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} \binom{m+1}{m-k+1}$$

และ

$$hom(Ch_m, Ch_n) = \binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$$

จากทฤษฎี 3.3 เราสามารถเขียนสูตรดังกล่าวให้ในรูปแบบ rising factorial power ได้

ดังนี้

$$\binom{m+n+1}{n} = \binom{m+2+n-1}{n} = \frac{(m+2)^{(n)}}{n!} = \frac{(m+2)(m+3)(m+4)\cdots(m+n+1)}{n!}$$

จึงทำให้เราได้สูตรในการหาจำนวนโฮโมมอร์ฟิซึมอีกรูปหนึ่ง นั่นคือ

บทแทรก 3.2 สำหรับ $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ และ $n = m + 1$ จะได้ว่า

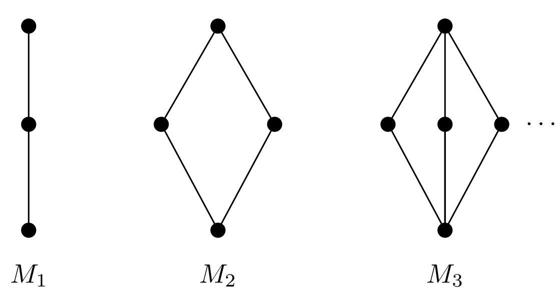
$$hom(Ch_m, Ch_n) = \frac{(m+2)^{(n)}}{n!} = \frac{(m+2)(m+3)(m+4)\cdots(m+n+1)}{n!}$$

ตัวอย่าง 3.2 จำนวนโฮโมมอร์ฟิซึมบนแลตทิสโซ่ที่มีความยาว 3 ไปยังแลตทิสโซ่ที่มีความยาว 4 เขียนแทนด้วย Ch_3, Ch_4 คำนวณได้ดังนี้

$$hom(Ch_3, Ch_4) = \frac{(3+2)(3+2+1)(3+2+2)(3+2+3)}{4!} = 70$$

3.4 จำนวนโฮโมมอร์ฟิซึมจากแลตทิสโซ่จำกัดไปยังแลตทิส M_n

ในหัวข้อ 3.2 และ 3.3 เราสามารถคำนวณจำนวนโฮโมมอร์ฟิซึมตามบทแทรก 3.1 และทฤษฎีบท 3.3 นั้นเราจะนำหลักการและวิธีการดังกล่าวนี้ไปใช้ในการหาจำนวนโฮโมมอร์ฟิซึมจากแลตทิสโซ่จำกัดไปยังแลตทิส M_n (ตัวอย่าง 2.1) จะเห็นได้ว่าแลตทิส M_n เกิดจากการเพิ่มจุด 1 จุดแล้วเชื่อมเส้นไปยังจุดปลายทั้งสอง ซึ่งเหมือนกับเพิ่มแลตทิสโซ่ที่มีความยาว 2 ทีละเส้นเพียงแต่ใช้จุดปลายเดียวกัน ดังนี้



รูปที่ 3.2: แลตทิส M_n

ด้วยเหตุนี้ถ้าเราพิจารณาการส่งจาก Ch_m ไปยัง $M_1, M_2, \ldots, M_n$ เราจะได้จำนวนโฮโมมอร์ฟิซึมตามต้องการ เราจะพิจารณาจำนวนโฮโมมอร์ฟิซึมจาก Ch_m ไปยัง M_n โดยการหาจำนวนโฮโมมอร์ฟิซึมของแลตทิสโซ่ที่มีความยาว $Ch_1, Ch_2, Ch_3, \ldots, Ch_m$ ไปยัง M_n ดังทฤษฎีบทต่อไปนี้

$$\begin{aligned}
hom(Ch_1, M_1) &= 6 \\
&= \binom{2+1+1}{2} \qquad \text{โดยสูตร (3.1)} \\
&= \binom{4}{2} + 3(1)(0) \\
&= hom(Ch_1, Ch_2) + 3(1)\binom{0}{1} \\
&= hom(Ch_1, M_1) + 3(1)\binom{0}{1} \\
hom(Ch_1, M_2) &= 9 \\
&= \binom{4}{2} + 3(1)(1) \\
&= hom(Ch_1, M_1) + 3(1)\binom{1}{1} \\
hom(Ch_1, M_3) &= 12 \\
&= \binom{4}{2} + 3(1)(2) \\
&= hom(Ch_1, M_1) + 3(1)\binom{1}{1} \\
&\vdots \\
hom(Ch_1, M_n) &= hom(Ch_1, M_1) + 3(1)\binom{n-1}{1} \\
&= hom(Ch_1, M_1) + 3(m)\binom{n-1}{1}
\end{aligned}$$

ในทำนองเดียวกันสำหรับ $m > 1$ และ $n \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า

$$\begin{aligned}
hom(Ch_2, M_n) &= hom(Ch_2, M_1) + 3(2)\binom{n-1}{1} \\
hom(Ch_3, M_n) &= hom(Ch_3, M_1) + 3(3)\binom{n-1}{1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} hom(Ch_4, M_n) &= hom(Ch_4, M_1) + 3(4)\binom{n-1}{1} \\ &\vdots \\ hom(Ch_m, M_n) &= hom(Ch_m, M_1) + 3(m)\binom{n-1}{1} \end{aligned}$$

โดยสูตรใน (3.1) ทำให้เราได้ว่าจำนวนโฮโมมอร์ฟิซึมของแลตทิสโซ่จำกัดไปยังแลตทิส M_n คือ

ทฤษฎีบท 3.4 สำหรับ $m, n \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า

$$hom(Ch_m, M_n) = \binom{m+3}{m+1} + 3m\binom{n-1}{1} \tag{3.2}$$

สำหรับ $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ และ $n \in \mathbb{N}$ ซึ่งเราสามารถเขียนจำนวนโฮโมมอร์ฟิซึมของแลตทิส Ch_m ไปยัง M_n ดังตาราง

$Ch_m \backslash M_n$	1	2	3	4	$\cdots$	n
0	3	4	5	6	$\cdots$	$\binom{n+2}{1}$
1	6	9	12	15	$\cdots$	$\binom{4}{2} + 3\binom{n-1}{1}$
2	10	16	22	28	$\cdots$	$\binom{4}{2} + 6\binom{n-1}{1}$
3	15	24	33	42	$\cdots$	$\binom{4}{2} + 9\binom{n-1}{1}$
4	21	33	45	57	$\cdots$	$\binom{4}{2} + 12\binom{n-1}{1}$
5	28	43	58	73	$\cdots$	$\binom{4}{2} + 15\binom{n-1}{1}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	
m	$\binom{m+3}{m+1}$	$\binom{m+3}{m+1} + 3m$	$\binom{m+3}{m+1} + 6m$	$\binom{m+3}{m+1} + 9m$	$\cdots$	$\binom{m+3}{m+1} + 3m\binom{n-1}{1}$

ตารางที่ 3.3: ตารางจำนวนโฮโมมอร์ฟิซึมจาก Ch_m ไปยัง M_n

พิจารณาจากตาราง 3.3 ทำให้บทตั้งต่อไปนี้เป็นจริง

บทตั้ง 3.6 สำหรับ $m = 0$ และ $n \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า

$$hom(Ch_0, M_n) = \binom{n+2}{1}$$

และจะสังเกตเห็นว่า ค่าในแต่ละตำแหน่งตามแถวนั้นเป็นไปตามทฤษฎีบทต่อไปนี้

ทฤษฎีบท 3.5 สำหรับ $m, n, r \in \mathbb{N}$ โดยที่ $2 \le r \le n$ จะได้ว่า

$$hom^r(Ch_m, M_n) = hom^{r-1}(Ch_m, M_n) + 3m$$

โดยที่ $hom^r(Ch_m, M_n)$ คือ ค่าตำแหน่งจำนวนโฮโมมอร์ฟิซึมที่ r ในแถวที่ m

ในลำดับต่อไปเราจะพิสูจน์ทฤษฎีบท 3.4 ว่าเป็นจริงสำหรับทุก $n \in \mathbb{N}$ ในแต่ละแถว m

พิสูจน์ ทฤษฎีบท 3.4

กรณี 1 สำหรับ $m = 0$ และ$n \in \mathbb{N}$ จะได้ว่า ทฤษฎีบท 3.5 เป็นจริงโดยบทตั้ง 3.6

กรณี 2 สำหรับ $m = 1$ ถ้า $n = 1$ โดยสมการ (3.1) จะได้

$$
\begin{aligned}
hom(Ch_1, M_1) &= hom(Ch_1, Ch_2) \\
&= \binom{2+1+1}{2} \\
&= \binom{1+3}{1+1} + 3(1)\binom{1-1}{1}
\end{aligned}
$$

สมมุติให้เป็นจริงที่ n เราต้องการแสดงว่า $n+1$ เป็นจริงด้วย สำหรับ $m = 1$ ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 3.5 และ (2.2) จะได้

$$
\begin{aligned}
hom^r(Ch_1, M_n) &= hom^{r-1}(Ch_1, M_n) + 3(1) \\
&= \binom{1+3}{1+1} + 3(1)\binom{n-1}{1} \\
&= \binom{4}{2} + 3\left[\binom{n}{1} - \binom{n-1}{0}\right] + 3 \\
&= \binom{4}{2} + 3\binom{n}{1}
\end{aligned}
$$

กรณี 3 สำหรับ $m = k$ ถ้า $n = 1$ เห็นได้ชัดเจนว่าเป็นจริงตามสมการ (3.1) ดังนั้น เราสมมุติให้เป็นจริงที่ n นั่นคือ $hom(Ch_k, M_n) = \binom{k+3}{k+1} + 3\binom{n-1}{1}$ ต้องการพิสูจน์ว่า $n+1$ ก็จริงด้วย ดังนั้น โดยทฤษฎีบท 3.5 และ (2.2) เราได้ว่า

$$
\begin{aligned}
hom^r(Ch_k, M_{n+1}) &= hom^{r-1}(Ch_k, M_n) + 3k \\
&= \binom{k+3}{k+1} + 3k\binom{n-1}{1} + 3k \\
&= \binom{k+3}{k+1} + 3k\left[\binom{n}{1} - \binom{n-1}{0}\right] + 3k \\
&= \binom{k+3}{k+1} + 3k\binom{n}{1}
\end{aligned}
$$

บทที่ 4
สรุปผลการวิจัย

ในงานวิจัยชิ้นนี้ได้ทำการศึกษาแลตทีสโซ่จำกัดมีความยาว m และ n โดยหาจำนวนโฮโมมอร์ฟิซึมและศึกษาความสัมพันธ์ของทฤษฎีที่เกี่ยวข้องทำให้ผู้วิจัยได้ทฤษฎีและสูตรในการหาจำนวนโฮโมมอร์ฟิซึมบนแลตทีสโซ่โดยสรุปพอสังเขป ดังนี้

สำหรับ i, j และ $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ โดยที่ $n \geq j \geq i \geq 0$ จะได้ว่า

$$hom_j^i(Ch_m, Ch_n) = \binom{m+j-i-1}{j-i}$$

และ

$$hom^i(Ch_m, Ch_n) = \sum_{j=i}^{n} \binom{m+j-i-1}{j-i}$$

จากสองสมการข้างต้นทำให้เราได้สูตรในการหาจำนวนเอนโดมอร์ฟิซึมบนแลตทีสโซ่ดังนี้

$$hom(Ch_m, Ch_n) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{n} \binom{m+j-i-1}{j-i}$$

นอกจากนี้เรายังได้สูตรเพิ่มเติมจากการศึกษาพบว่ายังไปสอดคล้องจำนวนเชิงสามเหลี่ยม จึงทำให้เราได้สูตรเพิ่มขึ้นมา คือ สำหรับ m และ n เป็นจำนวนเต็มบวก จะได้ว่า

$$hom(Ch_m, Ch_n) = \binom{n+m+1}{n}$$

สำหรับ $n = m + 1$ ซึ่งสามารถเขียนในรูปของ rising factorial power คือ

$$hom(Ch_m, Ch_n) = \frac{(m+2)^{(n)}}{n!} = \frac{(m+2)(m+3)(m+4)\cdots(m+n+1)}{n!}$$

ผู้วิจัยได้หาจำนวนโฮโมมอร์ฟิซึมจากแลตทีสโซ่ไปยังแลตทีส M_n และทำให้ได้

จำนวนโฮโมมอร์ฟิซึม คือ

$$hom(Ch_m, M_n) = \binom{m+3}{m+1} + 3m\binom{n-1}{1}$$

สำหรับ $m, n \in \mathbb{N}$ ในกรณี $m = 0$ เราได้ว่าจำนวนโฮโมมอร์ฟิซึม คือ

$$hom(Ch_0, M_n) = \binom{n+2}{1}$$

สุดท้ายผู้วิจัยมีแนวคิดต่อไปว่าจะนำทฤษฎีที่ได้นี้ไปหาจำนวนโฮโมมอร์ฟิซึมของแลตทิส M_n ไปยังแลตทิสโซ่จำกัดซึ่งไม่ได้หาไว้ในงานวิจัยนี้แและการประยุกต์อื่น ๆ ต่อไป

บรรณานุกรม

Arworn, Sr. (2009). An algorithm for the numbers of endomorphisms on paths (DM13208) *Discrete Mathematics*, Volume 309, Issue 1, Pages 94-103.

Arworn, Sr. & Wojtylak, P. (2008). An algorithm for the number of path homomorphisms, *Discrete Mathematics*, (doi:10.1016/j.disc.2008.04.010).

Davey, B.A. and Priestley, H.A.(2002). Introduction to Lattices and Order. Cambridge University Press. The United Kingdom.

Krataitong, W.(2012). The number of lattice endomorphisms from finite chain to finite chain. Journal of Science and Technology, Uttaradit Rajabhat University.

Pipatttanajida, N.,(2006). Finding the number of cycle homomorphisms, Chiang Mai University.

Sirisatianwatthana, P.,(2009). Finding the number of path egamorphisms, SakThong journal, kamphaeng Phet Rajbhat University, Thailand.

Sirisatianwatthana, S. and Pipatttanajida, N.,(2010). Finding the number of cycle egamorphisms, Thai Journal of Mathematics, special Issue (Annual Meeting in Mathematics, 2009 - 2010), Thailand.

Weisstein, Eric W.,(1999-2010). Triangular Numbers. From MathWorld–A Wolfram Web Resource. http://mathworld.wolfram.com/TriangularNumber.html, March, 2010.

http://en.wikipedia.org/wiki/Lattice_(order)#Bounde_lattice (08/08/2012)

ประวัติผู้วิจัย

ชื่อ ไพชยนต์

ชื่อสกุล สิริเสถียรวัฒนา

วัน เดือน ปีเกิด วันที่ 1 มกราคม พ.ศ. 2520

ประวัติการศึกษา

พ.ศ.2543 จบปริญญาตรี สาขาวิชาคณิตศาสตร์ สถาบันราชภัฏกำแพงเพชร กำแพงเพชร

พ.ศ. 2546 จบปริญญาโท สาขาวิชาคณิตศาสตร์ประยุกต์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีสุรนารี นครราชสีมา

ประวัติการทำงาน

พ.ศ. 2546 รับการบรรจุเข้ารับราชการตำแหน่งอาจารย์ สถาบันราชภัฏกำแพงเพชร กำแพงเพชร

พ.ศ. 2553 ได้รับแต่งตั้งในตำแหน่งผู้ช่วยศาสตราจารย์ มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร

พ.ศ.2553-2555 ได้รับแต่งตั้งให้เป็นรองผู้อำนวยการสำนักส่งเสริมวิชาการและงานทะเบียน มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร จังหวัดกำแพงเพชร