บทที่ 3
สถิติศาสตร์

การที่อุณหพลศาสตร์เชิงสถิติว่าด้วย การอธิบายสมบัติมหาทรรศน์ของระบบโดยอาศัยค่าเฉลี่ยของสมบัติจุลทรรศน์ของอนุภาคที่เป็นองค์ประกอบของระบบนั้น ด้วยเหตุนี้การศึกษาอุณหพลศาสตร์เชิงสถิติจึงต้องอาศัยพื้นฐานความรู้ทางด้านสถิติศาสตร์ (Statistics) เกี่ยวกับทฤษฎีความน่าจะเป็น (Probability Theory) และการแจกแจงทางสถิติต่าง ๆ ในบทนี้จะกล่าวถึงเรื่องของความน่าจะเป็นและการแจกแจงสถิติที่ใช้ในการศึกษาทางอุณหพลศาสตร์เชิงสถิติ

1. ปริภูมิสิ่งตัวอย่าง (Sample Space)

การศึกษาทางวิทยาศาสตร์จะเน้นการค้นหาความรู้ (knowledge) ที่เป็นความจริง สิ่งที่จะเป็นข้อยุติว่า ความรู้นั้นเป็นจริงได้คือ จะต้องสามารถทดลองได้และไม่ว่าจะทดลองซ้ำๆ กี่ครั้งก็ตามผลที่ได้จะต้องเหมือนเดิม ดังนั้นคำว่า การทดลอง (experiment) หมายถึง กระบวนการกระทำที่สามารถกระทำซ้ำๆ ได้ ซึ่งผลการกระทำเราเรียกว่า **ผลลัพธ์** (outcome) เช่น ในการโยนเหรียญ 1 อัน แล้วดูว่าหน้าที่หงายขึ้นเป็นอะไร จะพบว่า หน้าที่หงายขึ้นคือ ผลลัพธ์จะมีได้ 2 อย่าง คือ หัวหรือก้อย ในการทดลองหนึ่งๆ จะได้ เซท (set) ของผลลัพธ์ที่เป็นไปได้เราเรียกว่า **ปริภูมิสิ่งตัวอย่าง** จึงนิยามได้ว่า

นิยาม “เซทหนึ่งซึ่งมีสมาชิก (elements) เป็นผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดของการทดลองอย่างหนึ่งเราเรียกว่า ปริภูมิสิ่งตัวอย่าง ซึ่งเขียนแทนด้วย S และเรียกสมาชิกหนึ่งๆ ของปริภูมิสิ่งตัวอย่างว่า **จุดสิ่งตัวอย่าง** (sample point)”

ตัวอย่างที่ 3.1 ในการทอดลูกเต๋า 1 ลูก แล้วดูว่าหน้าที่หงายขึ้นเป็นแต้มเท่าใดจะได้ปริภูมิสิ่งตัวอย่างที่มีสมาชิกเป็นแต้มที่เป็นไปได้ของหน้าลูกเต๋าที่หงายขึ้นเป็น

$$S_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$$

แต่ถ้าสนใจแต่เพียงว่า แต้มที่เป็นไปได้ของหน้าลูกเต๋าที่หงายขึ้นเป็นเลขคู่หรือเลขคี่ก็จะได้ปริภูมิสิ่งตัวอย่างเป็น

$$S_2 = \{\text{คู่}, \text{คี่}\}$$

จากตัวอย่างที่ 3.1 นี้จะเห็นว่า ในการทดลองหนึ่งๆ อาจจะมีปริภูมิสิ่งตัวอย่างได้หลายๆ แบบขึ้นอยู่กับว่าความสนใจของผู้ทดลองว่าต้องการจะทราบอะไร แต่ถ้าเปรียบเทียบปริภูมิสิ่งตัวอย่าง S_1 กับ S_2 ในตัวอย่างจะเห็นว่า S_1 ให้รายละเอียดมากกว่า S_2 ดังนั้นในการทดลองหนึ่งๆ เราจึงต้องเลือกปริภูมิสิ่งตัวอย่างที่ให้รายละเอียดมากที่สุด

การทดลองหนึ่งๆ บางครั้งเราอาจสนใจเฉพาะผลลัพธ์เพียงส่วนใดส่วนหนึ่งของผลลัพธ์ทั้งหมด เช่น ในการทอดลูกเต๋าลูกหนึ่ง เราจะสนใจแต่เพียงผลลัพธ์ที่เป็นการหงายหน้าเป็นแต้มที่เลข 2 สามารถหารได้ลงตัว กรณีเช่นนี้เซทของผลลัพธ์ที่เราสนใจจึงเป็น

$$E = \{2, 4, 6\}$$

เมื่อเปรียบเทียบกับปริภูมิสิ่งตัวอย่าง S_1 ในตัวอย่างที่ 3.1

$$S_1 = \{1,2,3,4,5,6\}$$

จะเห็นว่า สมาชิก ของ E เป็นสมาชิกของ S_1 ด้วย เรียกว่า E เป็นเซทย่อย (subset) ของ S_1 เป็น

$$E \subset S_1$$

กรณีเช่นนี้ เราเรียกว่า E เป็นเหตุการณ์หนึ่ง จึงนิยามได้ว่า

นิยาม “เหตุการณ์หนึ่งคือ เซทย่อยเซทหนึ่งของปริภูมิสิ่งตัวอย่าง”

ทั้งนี้เซทว่าง (null set คือ เซตที่ไม่มีสมาชิกมักใช้สัญลักษณ์เป็น ϕ) และตัวปริภูมิสิ่งตัวอย่างเองก็จัดว่าเป็นเหตุการณ์ด้วยเช่นกัน

ตัวอย่างที่ 3.2 ในการหยิบไพ่ 1 ใบ ออกจากกองไพ่กองหนึ่ง ถ้าพิจารณาแต่เพียงลักษณะของหน้าไพ่ ก็จะได้ปริภูมิสิ่งตัวอย่างเป็น

$$S = \{\text{ไพ่ดำ, โพแดง, ดอกจิก, ข้าวหลามตัด}\}$$

แต่เป็นเหตุการณ์ที่ต้องการเฉพาะไพ่ที่มีหน้าเป็นสีแดง (R) ก็จะได้

$$R = \{\text{โพแดง, ข้าวหลามตัด}\}$$

นั่นคือ R เป็นเหตุการณ์หนึ่ง เพราะว่า

$$R \subset S$$

ในอุณหพลศาสตร์ ซึ่งเราสนใจศึกษาระบบอุณหพลวัต ถ้าระบบหนึ่งประกอบด้วยอนุภาคที่เหมือนกัน (identical particles) เช่น โมเลกุลของแก๊สชนิดหนึ่งซึ่งจะต้องเป็นโมเลกุลที่เหมือนกัน ในกลศาสตร์แผนเดิม (classical mechanics) นั้น รายละเอียดสำหรับอนุภาคหนึ่งๆ ที่สถานะหนึ่งจะต้องประกอบด้วย

- พิกัดตำแหน่ง (positional coordinates) 3 พิกัดคือ x, y, z, (ในระบบพิกัดฉาก)
- พิกัดโมเมนตัม (momentum coordinatesป 3 พิกัดคือ p_x, p_y, p_z

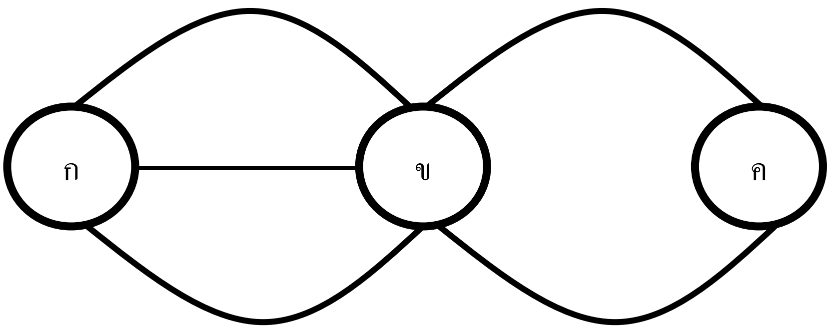
ดังนั้นรายละเอียดของอนุภาคหนึ่งๆ จะมีสมาชิก 6 สมาชิก คือ x, y, z, p_x, p_y, p_z ประกอบกันเป็นเซทที่เป็นปริภูมิสิ่งตัวอย่างเรียกว่า **ปริภูมิเฟส** (phase space) ดังนั้นปริภูมิเฟสจึงเป็นปริภูมิสิ่งตัวอย่างชนิดหนึ่งซึ่งมีพิกัดเป็นสมาชิก 6 สมาชิก (คือเป็นปริภูมิ 6 มิติ) แต่ว่าในระบบหนึ่งมีอนุภาคจำนวนมากมายจึงแบ่งปริภูมิเฟสออกได้เป็น 2 ชนิด คือ

1. **ปริภูมิเฟสเชิงโมเลกุล** (molecular phase space หรือ $\mu-$space) เป็นปริภูมิ 6 มิติของอนุภาคหนึ่งๆ ซึ่งในปริภูมิเฟสชนิดนี้ตำแหน่งและโมเมนตัมของอนุภาคหนึ่งจะถูกแทนด้วย จุด 1 จุด ดังนั้น ถ้าระบบนั้นมีอนุภาคจำนวน N อนุภาคก็จะประกอบด้วยจุดจำนวน N จุด

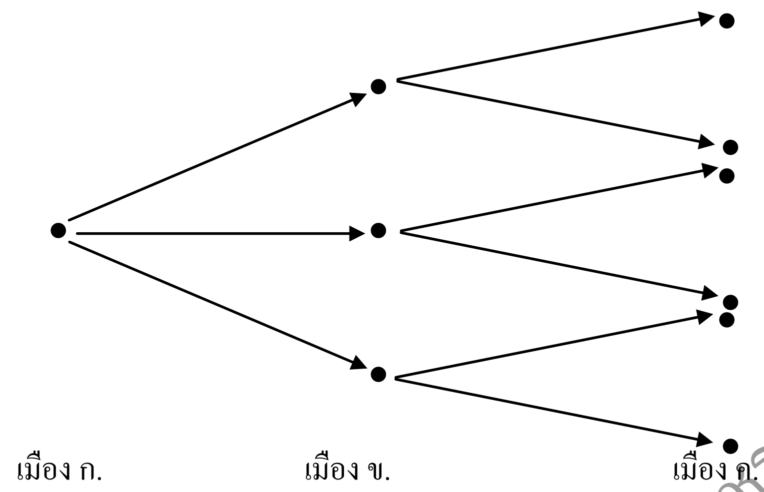
2. **ปริภูมิเฟสของแก๊ส** (gas phase space หรือ $\gamma-$space) เป็นปริภูมิ 6 มิติของอนุภาคทั้งหมด หมายความว่า ระบบที่มีอนุภาคจำนวน N อนุภาคก็แทนด้วยจุดเพียง 1 จุด ในปริภูมิชนิดนี้

2. การนับจำนวนจุดสิ่งตัวอย่าง (Counting Sample Points)

จากปริภูมิสิ่งตัวอย่างและเหตุการณ์ต่าง ๆ ปัญหาที่น่าสนใจในทางสถิติคือ การหาจำนวนสมาชิกหรือจุดสิ่งตัวอย่างหรือจำนวนวิธีที่จะเกิดขึ้นในปริภูมิสิ่งตัวอย่าง หรือเหตุการณ์ของการทดลองหนึ่ง ซึ่งวิธีการหาจำนวนสมาชิกดังกล่าวจะต้องใช้การนับจำนวนวิธีการ หรือจำนวนสมาชิกทั้งหมด เช่น ในการเดินทางจากเมือง ก. ไปยังเมือง ข. มี 3 เส้นทาง และจากเมือง ข. ไปยังเมือง ค. มี 2 เส้นทาง ดังรูป



ถ้าเราจะแสดงการเลือกเส้นทางจากเมือง ก. ไปยังเมือง ค. ด้วยแผนภาพต้นไม้ (tree diagram) ดังนี้



จะเห็นว่า ในการเดินทางจากเมือง ก. ผ่านเมือง ข ไปยังเมือง ค. จะมีเส้นทางให้เลือกได้ถึง 3×2 เส้นทาง นั่นคือ มีวิธีการเดินทางจากเมือง ก ไปยังเมือง ค ได้ถึง 6 วิธี ซึ่งเป็นจำนวนสมาชิกหรือจุดสิ่งตัวอย่าง

ในการนับจำนวนสมาชิกทั้งหมดของปริภูมิสิ่งตัวอย่าง เราสามารถใช้ทฤษฎีบทหลักมูล (fundamental theorems) ต่างๆ ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 1 "ถ้าการกระทำชนิดหนึ่งสามารถกระทำให้ n_1 วิธีและในแต่ละวิธีของ n_1 นั้นยังมีวิธีการย่อยๆ ได้อีก n_2 วิธี เราจะได้ว่าการกระทำชนิดนี้สามารถเลือกวิธีทำได้ $n_1 \times n_2$ วิธี"

ตัวอย่างที่ 3.3 จงหาจำนวนจุดสิ่งตัวอย่างในปริภูมิสิ่งตัวอย่างของการทอดลูกเต๋า 2 ลูก

วิธีทำ

เมื่อทอดลูกเต๋าลูกที่หนึ่ง จะเกิดหน้าต่างๆ ได้ 6 วิธี

และลูกเต๋าลูกที่สองก็จะเกิดหน้าได้ 6 วิธี

ดังนั้น การทอดลูกเต๋า 2 ลูกจะสามารถหงายหน้าต่างๆ ได้

$6 \times 6 \quad = \quad 36$ วิธี **ตอบ**

ทฤษฎีบทที่ 2 "ในการกระทำที่มีลำดับขั้นการกระทำทั้งหมด k ขั้น

ขั้นที่ 1 กระทำได้ n_1 วิธี

ขั้นที่ 2 กระทำได้ n_2 วิธี

……………………………...

ขั้นที่ k กระทำได้ n_k วิธี

จะมีวิธีการกระทำทั้งหมดได้ $n_1 \times n_2 \times \ldots\ldots \times n_k$ วิธี"

ตัวอย่างที่ 3.4 ถ้าจะเขียนเลขจำนวนที่มี 3 หลักจากเลข 0, 1, 3,5,7,9 จะได้กี่จำนวนโดยที่จำนวนหนึ่งๆ จะมีเลขซ้ำกันไม่ได้

วิธีทำ มีตัวเลขทั้งหมด 6 ตัวเลข ที่จะนำมาเป็นจำนวน 3 หลักคือหลักร้อย หลักสิบ และหลักหน่วย หลักร้อยจะสามารถเลือกได้ 6 ตัวเลข แต่ไม่สามารถใช้เลข 0 ได้ จึงสามารถเลือกเลขได้ทั้ง 5 ตัวเลข

หลักสิบจะเหลือเลขให้เลือกได้ 5 ตัวเลข

และหลักหน่วยจะเหลือเลขให้เลือกได้ 4 ตัวเลข

ดังนั้นจำนวนทั้งหมดจะมีได้ $5 \times 5 \times 4 = 100$ จำนวน **ตอบ**

ในบางครั้งการทดลองอาจจะเกี่ยวข้องกับการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของหรือบุคคลที่แตกต่างกัน (distinct objects) เช่น อักษรไทย ก,ข,ค ซึ่งแตกต่างกัน เมื่อนำมาเรียงสับเปลี่ยนจะได้ดังนี้

กขค	กคข
ขกค	ขคก
คกข	คขก

จะเห็นว่า มีวิธีเรียงสับเปลี่ยนได้ 6 วิธี

วิธีการเรียงสับเปลี่ยนทั้งหมด เป็นสมาชิกหรือจุดสิ่งตัวอย่างในปริภูมิสิ่งตัวอย่างของการเรียงสับเปลี่ยนสิ่งของหรือบุคคล จำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยนจึงเป็นการนับจำนวนสมาชิกหรือจุดสิ่งตัวอย่างได้เช่นกัน ถ้าใช้ทฤษฎีบทที่ 2 จะได้ว่า

ตำแหน่งแรกสามารถใช้อักษรได้ทั้ง 3 ตัวอักษร

ตำแหน่งที่สองจะสามารถใช้อักษรได้ 2 ตัวอักษร

ตำแหน่งที่สามจะสามารถใช้อักษรได้ 1 ตัวอักษร

จะสามารถเรียงสับเปลี่ยนตัวอักษรได้ $3 \times 2 \times 1 = 6$ วิธี ดังนั้นถ้ามีวัตถุที่แตกต่างกันจำนวน n นำมาเรียงสับเปลี่ยนหมดทั้ง n จะมีวิธีเรียงสับเปลี่ยนได้ $n(n-1)(n-2)\ldots 3 \times 2 \times 1$ วิธี

การเขียนผลคูณของจำนวนเต็มบวกจากมากไปหา 1 เช่นนี้เรียกว่า factorial ซึ่งมีนิยามดังนี้

นิยาม "ถ้า n เป็นจำนวนเต็มบวก จำนวน n! เราเรียกว่า factorial n มีค่าเป็น

$$n! = n(n-1)(n-2)\ldots 3 \times 2 \times 1"$$

ทั้งนี้

$$1! = 1$$

และ

$$0! = 1$$

จึงได้ ทฤษฎีบทเกี่ยวกับการนับจำนวนวิธีการเรียงสับเปลี่ยน ดังต่อไปนี้

ทฤษฎีบทที่ 3 "ถ้ามีวัตถุที่แตกต่างกันจำนวน n ชิ้น จะมีวิธีเรียงสับเปลี่ยนวัตถุทั้งหมด n ชิ้น ได้ n! วิธี"

เช่น อักษร ก ข และ ค เป็นวัตถุที่แตกต่างกัน 3 ชิ้น จะสามารถเรียงสับเปลี่ยนได้ 3! วิธี

แต่ถ้าการเรียงสับเปลี่ยนในแต่ละครั้งเป็นการเรียงสับเปลี่ยนวัตถุเพียงบางส่วนของวัตถุทั้งหมด สามารถหาวิธีเรียงสับเปลี่ยนได้จากทฤษฎีบทที่ 4

ทฤษฎีบทที่ 4 "วัตถุที่แตกต่างกันจำนวน n ชิ้น ถูกนำมาจัดเรียงสับเปลี่ยนครั้งละ r ชิ้นจะได้วิธีเรียงสับเปลี่ยน $\frac{n!}{(n-r)!}$ วิธี"

ตัวอย่างที่ 3.5 ในการจัดประชุมวิชาการครั้งหนึ่งจัดให้มีการประชุม 4 วัน โดยจัดให้มีกิจกรรมการบรรยาย 3 วัน โดยเชิญผู้บรรยาย 3 คน มาบรรยายคนละ 1 วัน จะจัดได้กี่วิธี

วิธีทำ เป็นการเรียงสับเปลี่ยนจากจำนวนวันทั้งหมด = 4 วัน นำมาจัดครั้งละ 3 วัน

จำนวนวิธีทั้งหมด $= \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!}$

$= 24$ วิธี **ตอบ**

การเรียงสับเปลี่ยนตามทฤษฎีบทที่ 3 และ 4 ที่ผ่านมานี้เป็นการเรียงสับเปลี่ยนวัตถุที่แตกต่างกัน แต่ถ้ามีวัตถุที่เหมือนกันอยู่บ้าง จะพบว่า การเรียงสับเปลี่ยนมีจำนวนวิธีลดลง เช่น ในการเรียงสับเปลี่ยนอักษร a, b, c, d (เป็นวัตถุที่แตกต่างกัน) จะสามารถจัดได้ 24 วิธี คือ

abcd	abdc	acbd
acdb	adbc	adcb
bacd	badc	bcad
bcda	bdac	bdca
cabd	cadb	cbad
cbda	cdab	cdba
dabc	dacb	dcba
dcab	dbac	dbca

ถ้ามีวัตถุที่ซ้ำกัน (เหมือนกัน เช่น ให้

	a	เหมือนกับ	b	คือให้ $a = b = x$
และ	c	เหมือนกับ	d	คือให้ $c = d = y$

วิธีเรียงสับเปลี่ยนที่กล่าวมาแล้วจะเป็น

xxyy	xxyy	xyxy
xyyx	xyxy	xyyx
xxyy	xxyy	xyxy
xyyx	xyxy	xyyx
yxxy	yxyx	yxxy
yxyx	yyxx	yyxx
yxxy	yxyx	yyxx
yyxx	yxxy	yxyx

จะเห็นว่า วิธีเรียงสับเปลี่ยนบางวิธีก็ซ้ำกัน มีวิธีการเรียงสับเปลี่ยนที่แตกต่างกันเพียง 6 วิธี เท่านั้น คือ

xxyy	xyxy	xyyx
yxxy	yxyx	yyxx

ซึ่งมีจะเห็นว่า วัตถุทั้ง 4 ชิ้น มี 2 ชนิด คือ x กับ y โดยที่ x มี 2 ชิ้น และ y มี 2 ชิ้น มีวิธีการเรียงสับเปลี่ยนเป็น $\frac{4!}{2!2!} = 6$ วิธี

จึงมีทฤษฎีบทสำหรับการเรียงสับเปลี่ยนวัตถุที่ไม่แตกต่างกันคือ

ทฤษฎีบทที่ 5 “ถ้ามีวัตถุจำนวน n ชิ้น แบ่งออกได้เป็น k ชนิด ชนิดที่หนึ่งมี n_1 ชิ้นชนิดที่สองมี n_2 ชิ้น ... ชนิดที่ k ที่ n_k ชิ้นเมื่อเรียงสับเปลี่ยนวัตถุทั้ง n ชิ้นจะมีวิธีทั้งหมด

$$\frac{n!}{n_1!n_2!....n_k!} \text{ วิธี”}$$

ตัวอย่างที่ 6 ถ้าต้องการประดับธงสีต่าง ๆ เรียงเป็นแถวบนกำแพง โดยมีธงสีแดง 3 อัน ธงสีเหลือง 4 อัน ธงสีฟ้า 2 อัน จะจัดเรียงได้กี่วิธี

วิธีทำ จำนวนธงทั้งหมด 9 อัน

ดังนั้นจำนวนวิธีการจัดเรียง $= \frac{9!}{3!4!2!}$

$= 1{,}260$ วิธี **ตอบ**

ในบางสถานการณ์การจัดการกับวัตถุ มิใช่เป็นการจัดเรียงสับเปลี่ยนวัตถุ แต่เป็นการจัดแบ่งวัตถุออกเป็นหมู่หรือเป็นกลุ่ม เช่น สมมุติว่า มีวัตถุที่ไม่แตกต่างกันจำนวน n ชิ้น ถูกแบ่งออกเป็นกลุ่มจำนวน k กลุ่ม โดย

กลุ่มที่หนึ่งมีวัตถุจำนวน n_1 ชิ้น
กลุ่มที่สองมีวัตถุจำนวน n_2 ชิ้น
....
กลุ่มที่ k มีวัตถุจำนวน n_k ชิ้น

จะมีวิธีจัดกลุ่มวัตถุทั้งหมดได้ $\dfrac{n!}{n_1!n_2!....n_k!}$ วิธี

โดย

$$n_1 + n_2 + ...+ n_k = n$$

ตัวอย่างที่ 3.7 ถ้าจัดคน 7 คน ให้เข้าพักในห้องขนาด 3 คน จำนวน 1 ห้อง ห้องขนาด 2 คน จำนวน 2 ห้อง จะจัดได้กี่วิธี

วิธีทำ $n = 7$

$n_1 = 3, \quad n_2 = 2, \quad n_3 = 2$

จำนวนวิธีการจัด $= \dfrac{7!}{3!2!2!}$

$=$ 210 วิธี **ตอบ**

แต่เป็นถ้าการจัดแบ่งกลุ่มของจำนวน n ชิ้น ออกเป็น 2 กลุ่ม โดยกลุ่มหนึ่งมีสิ่งของ r ชิ้น อีกกลุ่มหนึ่งจะมีสิ่งของ $n - r$ ชิ้น วิธีการจัดกลุ่มแบบนี้จะมี $\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ วิธี ซึ่งวิธีการนี้จะเหมือนกับการหยิบเลือกสิ่งของทั้งหมด n ชิ้น เลือกมา r ชิ้น โดยไม่คำนึงถึงลำดับของสิ่งของนั้น จะมีวิธีการเลือกทั้งหมดได้ $\dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ วิธี เช่นกัน การเลือกแต่ละวิธีเรียกว่า **วิธีจัดหมู่** (combination)

ทฤษฎีบทที่ 6 “วิธีจัดหมู่สิ่งของที่แตกต่างกัน n ชิ้น จัดเป็นหมู่ละ r ชิ้นจะมีวิธีการจัดได้ $\begin{pmatrix} n \\ r \end{pmatrix}$

$$= \frac{n!}{r!(n-r)!} \text{ วิธี”}$$

ตัวอย่างที่ 3.8 ในการเลือกกรรมการบริหารสมาคมวิทยาศาสตร์ชุดหนึ่งประกอบด้วยนักเคมี 2 คน นักฟิสิกส์ 2 คน นักชีววิทยา 2 คน จากสมาชิกที่เป็นนักเคมี 4 คน นักฟิสิกส์ 3 คน นักชีววิทยา 5 คน จะเลือกได้กี่วิธี

วิธีทำ การคัดเลือกนักเคมี 2 คนจากทั้งหมด 4 คน

จะได้ $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!(4-2)!} = 6$ วิธี

การคัดเลือกนักฟิสิกส์ 2 คน จากทั้งหมด 3 คน

จะได้ $\binom{3}{2} = \frac{3!}{2!(3-2)!} = 3$ วิธี

และการคัดเลือกนักชีววิทยา 2 คน จากทั้งหมด 5 คน

จะได้ $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = 10$ วิธี

วิธีทั้งหมดในการคัดเลือก $= 6 \times 3 \times 10$

$= 180$ วิธี **ตอบ**

3. ความน่าจะเป็น (Probability)

ในเหตุการณ์ประจำวันแต่ละวันของเราทุกคนคงจะต้องเคยได้ยินได้อ่านพบกับคำพูดต่อไปนี้กันมาบ้าง

- วันนี้ฝนอาจจะตก
- ปีนี้น้ำอาจจะท่วมอีก
- เดือนหน้าอาจจะมีแขกชาวต่างประเทศมาเยี่ยมมหาวิทยาลัยเรา ฯลฯ

คำพูดเหล่านี้แสดงถึงความไม่แน่ใจของผู้พูดว่า เหตุการณ์จะเกิดขึ้นหรือไม่ แต่เป็นการแสดงทรรศนะของความน่าจะเป็นในการเกิดเหตุการณ์นั้น สำหรับปริภูมิสิ่งตัวอย่างจำกัด (finite sample space) จะพบว่า แต่ละจุดสิ่งตัวอย่างจะมีค่าที่แสดงถึงโอกาสของการที่จะมีจุดสิ่งตัวอย่างนั้นในปริภูมิสิ่งตัวอย่าง ค่าที่แสดงถึงโอกาสนั้นเรียกว่า **น้ำหนัก** (weight,w) ค่าของน้ำหนักนี้จะมีค่าตั้งแต่ 0 ถึง 1.0 จุดสิ่งตัวอย่างที่มีโอกาสเกิดขึ้นแน่นอนจะมีค่าใกล้เคียง 1.0 จุดตัวอย่างที่มีโอกาสเกิดน้อยจะมีค่าใกล้เคียง 0 ในการทดลองแบบสุ่ม (random) นั้น เราถือว่า แต่ละจุดสิ่งตัวอย่างของผลลัพธ์มีน้ำหนักเท่ากันหมด นั่นคือ ทุกผลลัพธ์มีโอกาสเกิดขึ้นเท่าเทียมกัน

นิยาม “ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ใดๆ จะได้จากผลบวกของน้ำหนักของทุกๆ จุดสิ่งตัวอย่างในเหตุการณ์นั้น”

สมมุติว่า

A เป็นเหตุการณ์หนึ่งในปริภูมิสิ่งตัวอย่าง S

P(A) คือ ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A

จะได้

$$P(A) = \Sigma w_1$$

เมื่อ

w_1 คือน้ำหนักของจุดสิ่งตัวอย่าง i ในเหตุการณ์ A

และจะได้

$$P(S) = 1$$

หมายความว่า ความน่าจะเป็นทั้งหมดของปริภูมิสิ่งตัวอย่างเท่ากับ 1.0

สำหรับเซตว่าง (null set, Φ) จะมี

$$P(\Phi) = 1$$

และเหตุการณ์ A จะมีความน่าจะเป็นอยู่ระหว่าง 0 กับ 1.0

นั่นคือ

$$0 \leq P(A) \leq 1.0$$

ตัวอย่างที่ 3.9 ถ้าโยนเหรียญอันหนึ่ง 2 ครั้ง จงหาความน่าจะเป็นของการที่เหรียญหงายเป็นหน้าด้านหัวอย่างน้อย 1 ครั้ง

วิธีทำ เหรียญอันหนึ่งๆ มี 2 หน้าคือ หัว (H) กับก้อย (T) เมื่อโยนเหรียญ 2 ครั้ง หน้าจะหงายขึ้นทั้ง 2 ครั้งจะเป็นปริภูมิสิ่งตัวอย่าง คือ

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

ถ้าเหรียญนี้มีความสมดุล คือมีความน่าจะเป็นที่จะหงายหน้าขึ้นหัวหรือก้อยเท่าเทียมกัน น้ำหนักของการหงายหน้าขึ้นย่อมเท่ากัน ให้น้ำหนักของแต่ละจุดสิ่งตัวอย่างใน S เป็น w และเราทราบแล้วว่า ผลรวมของน้ำหนักของทุกจุดสิ่งตัวอย่างใน S = 1.0 จะได้

$$w + w + w + w = 1$$

$$4w = 1$$

$$w = \frac{1}{4}$$

ถ้า A เป็นเหตุการณ์ที่เหรียญหงายขึ้นหน้าหัวอย่างน้อย 1 ครั้ง นั่นคือ

$$A = \{HH, HT, TH\}$$

$$P(A) = \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$$

$$= \frac{3}{4}$$ **ตอบ**

จากตัวอย่างที่ 3.9 จะสังเกตเห็นว่า จำนวนจุดสิ่งตัวอย่างทั้งหมดใน S = 4 และมีจำนวนจุดสิ่งตัวอย่างที่เหรียญหงายขึ้นหน้าหัว = 3 ความน่าจะเป็น = $\frac{3}{4}$ กรณีที่ทุกจุดสิ่งตัวอย่างในปริภูมิสิ่งตัวอย่างมีน้ำหนักเท่ากัน เราสามารถจะหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ใดๆได้จากอัตราส่วนระหว่างจำนวนจุดสิ่งตัวอย่างในเหตุการณ์นั้นต่อจำนวนจุดสิ่งตัวอย่างทั้งหมดในปริภูมิสิ่งตัวอย่าง จึงได้ทฤษฎีบทเกี่ยวกับความน่าจะเป็น ดังนี้

ทฤษฎีบทที่ 7 "ถ้าการทดลองหนึ่งสามารถกระทำได้ด้วยวิธีต่างกัน N วิธี แต่ละวิธีมีโอกาสให้ผลลัพธ์เท่าเทียมกัน และถ้ามีผลลัพธ์ n วิธีเป็นผลลัพธ์ของเหตุการณ์ A ความน่าจะเป็นของการเกิดเหตุการณ์ A จะได้จาก

$$P(A) = \frac{n}{N} \text{”}$$

ตัวอย่างที่ 3.10 ไพ่สำรับหนึ่งมี 52 ใบ จงหาความน่าจะเป็นของการดึงไพ่ 1 ใบแล้วได้ไพ่เป็นรูปข้าวหลามตัด

วิธีทำ ไพ่สำรับหนึ่งมี 52 ใบเป็น

ไพ่โพดำ	13	ใบ
ไพ่โพแดง	13	ใบ
ไพ่ข้าวหลามตัด	13	ใบ
และไพ่ดอกจิก	13	ใบ

ไพ่ทุกใบมีโอกาสถูกดึงออกเท่าๆ กัน ดังนั้นความน่าจะเป็นของการดึงไพ่รูปข้าวหลามตัด

$$= \frac{13}{52}$$

$$= \frac{1}{4}$$ **ตอบ**

อย่างไรก็ตาม เซตของผลลัพธ์ที่เป็นไปได้ทั้งหมดหรือปริภูมิสิ่งตัวอย่างที่มีสมาชิกเป็นผลลัพธ์หรือ จุดสิ่งตัวอย่างนั้น ทั้งนี้ถ้ามีความสัมพันธ์ที่แต่ละจุดสิ่งตัวอย่างให้ค่าออกมาเป็นจำนวนจริง ความสัมพันธ์นั้น เรียกว่า **ตัวแปรสุ่ม** (random variables)

นิยาม "ตัวแปรสุ่ม คือ ฟังก์ชันค่าจริง (real-valued function) ซึ่งมีค่าเป็นจำนวนจริงถูกกำหนดโดยแต่ละจุดสิ่งตัวอย่างในปริภูมิสิ่งตัวอย่างหนึ่งๆ"

ตัวอย่างที่ 3.11 กล่องใบหนึ่งมีลูกบอลสีแดง 4 ลูก สีขาว 3 ลูก ถ้าหยิบลูกบอลแบบสุ่มจากกล่องใบนี้ทีละลูก (โดยไม่ใส่คืน) 2 ครั้ง ถ้า X เป็นจำนวนลูกบอลสีแดงที่หยิบได้ จงแสดงว่า X เป็นตัวแปรสุ่ม

วิธีทำ ให้ R แทนลูกบอลสีแดง

W แทนลูกบอลสีขาว

จะได้ปริภูมิสิ่งตัวอย่างของการหยิบลูกบอล 2 ครั้งๆ ละ 1 ลูกเป็น

$$S = \{RR, RW, WR, WW\}$$

จะเห็นว่า

ถ้าเป็น	RR	จะให้	X	มีค่า	=	2
	RW	จะให้	X	มีค่า	=	1
	WR	จะให้	X	มีค่า	=	1
	WW	จะให้	X	มีค่า	=	0

ซึ่ง 0, 1, 2 เป็นจำนวนจริง

แสดงว่า X เป็นฟังก์ชันมีค่าจริงที่ถูกกำหนดด้วยจุดสิ่งตัวอย่างในปริภูมินี้ นั่นคือ

X เป็นตัวแปรสุ่ม **ตอบ**

การกำหนดตัวแปรสุ่มนั้นเรานิยมใช้อักษรตัวใหญ่ เช่น X, Y, Z แทนตัวแปรสุ่ม และใช้ตัวอักษรตัวเล็ก เช่น x, y, z แทนค่าของตัวแปรสุ่ม

ในการแบ่งชนิดของตัวแปรสุ่มสามารถแบ่งออกได้เป็น 2 ชนิดดังนี้

1) ตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง (continuous random variables) คือ ตัวแปรสุ่มที่มีค่าต่อเนื่องกันได้หลายค่านับไม่ถ้วน เช่น

- ปริมาตรของสารละลาย
- เวลา
- ระยะทาง ฯลฯ

เป็นจำนวนที่มีค่าได้หลายค่านับไม่ถ้วน เป็นตัวแปรสุ่มต่อเนื่อง

2) ตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง (discrete random variables) คือ ตัวแปรสุ่มที่มีค่าเป็นจำนวนที่สามารถนับได้ถ้วน เช่น

- จำนวนลูกบอลสีแดง
- จำนวนคน

เป็นจำนวนที่มีค่านับได้เป็นตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง

4. การแจกแจงความน่าจะเป็น (Probability Distributions)

ในปริภูมิสิ่งตัวอย่าง สมาชิกหรือจุดสิ่งตัวอย่างย่อมมีความเป็นไปได้ที่จะซ้ำกันได้ ซึ่งจำนวนครั้งของสมาชิกที่ปรากฏในปริภูมิสิ่งตัวอย่าง คือความถี่ของสมาชิกนั้น การระบุความถี่ของสมาชิกทั้งหมดในปริภูมิสิ่งตัวอย่างนั้น คือ การแจกแจงความถี่ของจำนวนสมาชิก และอัตราส่วนของความถี่ของสมาชิกใด ๆ ต่อจำนวนสมาชิกทั้งหมดในปริภูมินั้น คือ ความน่าจะเป็นของสมาชิกนั้น ถ้าเป็นการระบุความถี่ของความน่าจะเป็นของสมาชิกทั้งหมดจะเป็นการแจกแจงความน่าจะเป็น แต่เนื่องจากตัวแปรสุ่มมี 2 ชนิดในการแจกแจงความน่าจะเป็นจึงแบ่งตามชนิดของตัวแปรสุ่ม คือ

4.1 การแจกแจงความน่าจะเป็นแบบไม่ต่อเนื่อง (Discrete Probability Distributions)

สำหรับตัวแปรสุ่ม (X) ที่มีค่า (x) ต่างๆ นั้น เราสามารถหาความน่าจะเป็นที่ตัวแปรสุ่มนั้นมีค่า x คือหา $P(X = x)$ ได้ เช่น จากตัวอย่างที่ 3.11 จำนวนจุดสิ่งตัวอย่างในปริภูมิสิ่งตัวอย่างมีเท่ากับ 4

X	มีค่าเท่ากับ	2	มีจำนวน	1	จุดสิ่งตัวอย่าง
X	มีค่าเท่ากับ	1	มีจำนวน	2	จุดสิ่งตัวอย่าง
X	มีค่าเท่ากับ	0	มีจำนวน	1	จุดสิ่งตัวอย่าง

เพราะฉะนั้นความน่าจะเป็นของการมีค่าต่างๆ จะเป็นดังตารางต่อไปนี้

X	2	1	0
จำนวนจุดสิ่งตัวอย่าง	1	2	1
$P(X = x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

ในการระบุค่าความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มเหล่านี้ มีบ่อยครั้งที่เราสามารถเขียนฟังก์ชันของ x ซึ่งเขียนเป็น f (x) นั่นคือ เขียนเป็น

$$f(x) \quad = \quad P(X = x)$$

เช่น

$$f(2) \quad = \quad P(X = 2)$$

ทำให้เกิดฟังก์ชันชนิดหนึ่งขึ้นมาคือ ฟังก์ชันความน่าจะเป็น (probability function) หรือการแจกแจงความน่าจะเป็น (probability distribution)

นิยาม “ฟังก์ชัน f (x) เป็นฟังก์ชันความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มไม่ต่อเนื่อง (X) ถ้าแต่ละผลลัพธ์ (x) ที่เป็นไปได้ ให้

1) $f(x) > 0$

2) $\Sigma f(x) = 1$

3) $P(X = x) = f(x)$ ”

ตัวอย่างที่ 3.12 ในการทอดลูกเต๋า 2 ลูก จงหาการแจกแจงความเป็นไปได้ของแต้มรวมของจำนวนที่ลูกเต๋าหงายหน้าขึ้น

วิธีทำ

ลูกเต๋าลูกหนึ่ง ๆ มี 6 หน้า แต่ละหน้ามีแต้มเป็น 1, 2, 3, 4, 5 และ 6 จึงมีวิธีการหงายหน้าได้ 6 วิธี เมื่อทอดลูกเต๋า 2 ลูก หน้าที่หงายขึ้นจะมี 2 หน้า ลูกเต๋า 2 ลูกจึงหงายหน้าได้ $6 \times 6 = 36$ วิธี และเมื่อนับแต้มรวมของหน้าที่หงายขึ้น เช่น ลูกที่หนึ่งหงายหน้า มีแต้ม 1 ลูกที่สองหงายหน้ามีแต้ม 2 แต้มรวามจะเป็น $1 + 2 = 3$ เป็นต้น ดังนั้น ความน่าเป็นของการหงายหน้าของลูกเต๋าทั้งสอง และแต้มรวามทั้ง 36 วิธี จะเป็นดังนี้

หน้าหงายที่หงายขึ้น	**แต้มรวม**	**หน้าหงายที่หงายขึ้น**	**แต้มรวม**
1,1	2	1,2	3
1,3	4	1,4	5
1,5	6	1,6	7
2,1	3	2,2	4
2,3	5	2,4	6
2,5	7	2,6	8
3,1	4	3,2	5
3,3	6	3,4	7
3,5	8	3,6	9
4,1	5	4,2	6
4,3	7	4,4	8
4,5	9	4,6	10
5,1	6	5,2	7
5,3	8	5,4	9
5,5	10	5,6	11
6,1	7	6,2	8
6,3	9	6,4	10
6,5	11	6,6	12

จะเห็นว่า แต้มรวมของหน้าหงายขึ้นมีค่าตั้งแต่ 2 ถึง 12 เช่น กรณีที่แต้มรวมของจำนวนที่หงายหน้าเป็น 5 จะมีหน้าหงายขึ้นคือ (1,4) (2,2) (3,2) และ (4,1) จะได้

$$P(X = 5) = \frac{4}{36}$$

จากวิธีการเช่นนี้ก็จะสามารถสร้างตารางแจกแจงความน่าจะเป็นของแต้มรวมได้ดังนี้

X	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	รวม
f(x)	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$	1

ตัวอย่างที่ 3.13 จงหาความสัมพันธ์สำหรับ การแจกแจงความน่าจะเป็นของจำนวนครั้งที่ด้านหัว (H) หงายขึ้นในการโยนเหรียญ 1 อัน 4 ครั้ง

วิธีทำ เนื่องจากเหรียญ 1 อันมี 2 หน้า คือ หัว (H) กับก้อย (T)

เหรียญ 1 อัน โยน 1 ครั้ง จะเกิดหน้าหงายขึ้น 2 วิธี

ถ้าโยน 4 ครั้ง จะเกิดหน้าหงายขึ้น $= 2 \times 2 \times 2 \times 2$

$= 16$ วิธี

ให้ X เป็นจำนวนครั้งที่ด้านหัวที่เหรียญหงายขึ้นในการโยน 4 ครั้ง

X จะมีค่าเป็น $x = 0, 1, 2, 3,4$ ดังนี้

หน้าที่หงายขึ้น	**X**	**หน้าที่หงายขึ้น**	**X**
H H H H	4	H H H T	3
H H T H	3	H T H H	3
T H H H	3	H H T T	2
H T H T	1	H T T H	2
T T H H	1	T H T H	2
T H H T	1	T T T H	1
T T H T	1	T H T T	1
H T T T	1	T T T T	0

จะเห็นว่า จำนวนวิธีที่เหรียญหงายด้านหัวขึ้น

4 ครั้งมี 1 วิธี $= \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}$

3 ครั้งมี 4 วิธี $= \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

2 ครั้งมี 6 วิธี $= \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$

1 ครั้งมี 3 วิธี $= \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

0 ครั้งมี 1 วิธี $= \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

ดังนั้นจำนวนวิธีที่ด้านหัวหงายขึ้น x ครั้ง $= \binom{4}{x}$ วิธี

ก็จะได้การแจกแจง ความน่าจะเป็น f(x) $= P(X = x)$ เป็น

$$f(x) = \frac{1}{16}\binom{4}{x}$$

เมื่อ $x = 0,1,2,3,4$ **ตอบ**

4.2 การแจกแจงความน่าจะเป็นแบบต่อเนื่อง (Continuous Probability Distribution)

สำหรับพวกตัวแปรสุ่มต่อเนื่องเราไม่สามารถทราบค่าที่แน่นอนได้ นั่นคือ ค่าที่แน่นอนของตัวแปรสุ่มจะเป็นศูนย์ ดังนั้นความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่มที่ค่าใด ๆ (สมมุติว่าที่ $X = b$) จะต้องมีค่าเท่ากับศูนย์

$$P(X = b) = 0$$

เช่นสมมุติว่า ตัวแปรสุ่ม (X) มีค่าเป็น

$$a < X < b$$

เราจะได้ความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม

$$\begin{aligned} P(a < X < b) &= P(a < X < b) + P(x = b) \\ &= P(a < X < b) \end{aligned}$$

เมื่อเป็นเช่นนี้จะเห็นได้ว่า เราไม่สามารถจะเขียนการแจกแจงความน่าจะเป็นแบบต่อเนื่องลงในตาราง ได้ จะต้องเขียนเป็นความสัมพันธ์ที่เป็นฟังก์ชันของตัวแปรต่อเนื่อง (x) กรณีเช่นนี้ เราเรียก f(x) ว่า **ฟังก์ชันความหนาแน่น** (density function)

นิยาม "ฟังก์ชัน f(x) จะเป็นฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นสำหรับตัวแปรสุ่ม (X) ที่หาค่าได้ ถ้า

1) $f(x) > 0$ สำหรับ $x \in R$
2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$
3) $P(a<X<b) = \int_a^b f(x)\,dx$ "

หมายความว่า f(x) จะเป็นฟังก์ชันความหนาแน่นของความน่าจะเป็นได้นั้น จะต้องมีลักษณะดังนี้

- f(x) นั้นต้องมีค่าเป็นจำนวนจริงบวกทุกๆ ค่าของ x ที่เป็นจำนวนจริง
- เมื่อทำการปริพันธ์ f(x) ตั้งแต่ $-\infty$ ถึง $+\infty$ แล้วจะต้องได้ค่าเป็น 1
- ความน่าจะเป็นของตัวแปรสุ่ม (X) ในช่วง a ถึง b จะได้จาก $\int_a^b f(x)\,dx$

ตัวอย่างที่ 3.14 ให้ X เป็นตัวแปรสุ่มที่มีฟังก์ชันความหนาแน่นเป็น

$$f(x) = \frac{x^2}{2} \quad \text{ที่ } -1 < x < 2$$
$$= 0 \quad \text{ที่นอกเหนือจากนั้น}$$

ก. จงพิสูจน์ว่า $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$

ข. หาค่า P (0 < x < 1)

วิธีทำ ก) จาก

$$f(x) = \frac{x^2}{3} \quad \text{ที่ } -1 < x < 2$$
$$= 0 \quad \text{ที่นอกเหนือจากนั้น}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{-1} f(x)\,dx + \int_{-1}^{2} f(x)\,dx + \int_{2}^{\infty} f(x)\,dx$$
$$= 0 + \int_{-1}^{2} \frac{x^2}{3}\,dx + 0$$
$$= \left.\frac{x^3}{9}\right|_{-1}^{2}$$
$$= \frac{8}{9} - \left(-\frac{1}{9}\right) = 1$$

ข)

$$P(0 < x < 1) = \int_0^1 \frac{x^2}{3}\,dx$$
$$= \left.\frac{x^3}{9}\right|_0^1$$
$$= \frac{1}{9} - 0 = \frac{1}{9} \qquad \textbf{ตอบ}$$

5. การแจกแจงความน่าจะเป็นในกลศาสตร์เชิงสถิติ

จากบทที่สองได้ทราบแล้วว่า พลังงานของสถานะต่าง ๆ ในระบบหนึ่ง จะมีค่าแตกต่างกันไป ถ้าให้

สถานะที่ 1 มีพลังงานเป็น E_1
สถานะที่ 2 มีพลังงานเป็น E_2
…………………………
สถานะที่ i มีพลังงานเป็น E_1

และในระบบนั้นมีจำนวนอนุภาคทั้งหมดเป็น N โดยกระจายกันเข้าบรรจุอยู่ตามสถานะต่างๆเป็นดังนี้

สถานะที่ 1 มีอนุภาคบรรจุ n_1 อนุภาค
สถานะที่ 2 มีอนุภาคบรรจุ n_2 อนุภาค
....
สถานะที่ i มีอนุภาคบรรจุอยู่ n_1 อนุภาค

ดังนั้น

สถานะที่ 1 มีพลังงานรวม = $n_1 E_1$
สถานะที่ 2 มีพลังงานรวม = $n_2 E_2$
…………………………..
สถานะที่ i มีพลังงานรวม = $n_1 E_1$

จะได้พลังงานรวมของระบบนี้ (โดยไม่คิดอันตรกิริยาระหว่างอนุภาค) เป็น

$$E = n_1 E_1 + n_2 E_2 + \ldots\ldots$$
$$= \sum_1 n_1 E_1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..\ 1$$

และจำนวนอนุภาคทั้งหมด (N) เป็น

$$N = n_1 + n_2 + \ldots.$$
$$= \sum_1 n_1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ 2$$

การที่อนุภาคต่างๆ กระจายเข้าบรรจุตามสถานะต่างๆ นั้นเป็นการแจกแจงอนุภาคตามสถานะที่สามารถที่สามารถเข้าบรรจุได้ (available states) ของระบบ ซึ่งความน่าจะเป็นของการแจกแจงนี้เกิดจากการประมาณค่าสถานะทางพลวัต (dynamical states) ของอนุภาคว่า สอดคล้องกับค่าพลังงานของ

สถานะที่จะเข้าบรรจุหรือไม่โดยอาศัยข้อสมมุติ (assumptions) ที่เหมาะสม แต่ว่าจำนวนอนุภาคที่บรรจุตามสถานะหนึ่งอาจจะเปลี่ยนแปลงได้ทั้งนี้เนื่องจากการชนกันและอันตรกิริยากันของอนุภาคเหล่านั้น ทำให้อนุภาคเหล่านั้นมีพลังงานเปลี่ยนไปเกิดการเปลี่ยนสถานะจากระดับหนึ่งไปเป็นอีกระดับหนึ่งก็ได้แต่ทั้งนี้ต้องเป็นไปตามเงื่อนไขดังนี้

1) จำนวนอนุภาคทั้งหมด (N) ของระบบต้องคงที่ คือ

$$N = \sum_{1} n_1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 3$$

2) ถ้าเป็นระบบโดดเดี่ยว (isolated system) พลังงานทั้งหมดของระบบต้องคงที่ คือ

$$E = \sum_{1} n_1 E_1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 4$$

ดังนั้นระบบหนึ่งสามารถจะมีการแจกแจงจำนวนอนุภาคในสถานะต่างๆ ได้หลายวิธี แต่จะอย่างไรก็ตามจะต้องมีการแจกแจงวิธีหนึ่งที่อนุภาคต่างๆ มีความน่าจะเป็นเข้าบรรจุได้มากที่สุด เราเรียกการแจกแจงนี้ว่า **การแจกแจงที่น่าจะเป็นมากที่สุด** (most probable distribution) ซึ่งถือว่าเป็นการแจกแจงที่ระบบนั้นอยู่ในสมดุลทางสถิติ (statistical equilibrium)

ความน่าจะเป็นของการแจกแจงอนุภาคไปตามสถานะต่างๆ นั้นขึ้นอยู่กับปัจจัย 2 ประการ คือ

1. ความน่าจะเป็นสำคัญ (priori probability หรือ intrinsic probability, G) เป็นความน่าจะเป็นที่ขึ้นอยู่กับสมบัติของสถานะและสมบัติของอนุภาคเหล่านั้น เช่น ความเข้ากันได้ (compatibility) ของสถานะพลังงาน (energy state) กับสถานะโมเมนตัมเชิงมุม (angular momentum state) ความน่าจะเป็นชนิดนี้จะเกี่ยวข้องกับโครงสร้างภายในของอนุภาคและสถานะ ซึ่งผลรวมของความน่าจะเป็นสำคัญของทุกสถานะ (g_1) จะต้องเป็น

$$\sum_{1} g_1 = 1 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 5$$

2. ความน่าจะเป็นอุณหพลวัต (thermodynamic probability, Ω) เป็นจำนวนวิธีทั้งหมดของการแจกแจงอนุภาคต่างๆ ไปตามสถานะต่างๆ อาจกล่าวได้ว่า ความน่าจะเป็นอุณหพลวัตเป็นสถานะจุลภาคของระบบนั่นเอง

ปัญหาที่สำคัญของกลศาสตร์เชิงสถิติคือ จะต้องหาการแจกแจงที่น่าจะเป็นมากที่สุดของระบบหนึ่งๆ ให้ได้เมื่อได้การแจกแจงนี้แล้วก็จะได้กฎการแจกแจง (distribution law) ของระบบนั้น และต่อไปก็จะต้องหาวิธีนำกฎการแจกแจงนี้ไปคำนวณหาสมบัติมหาทรรศน์ต่างๆ ว่าสอดคล้องกับค่าที่วัดได้หรือไม่ การจะได้กฎการแจกแจงที่ให้ผลได้ถูกต้องนั้นก็จะต้องมีข้อสมมุติ (assumptions) ที่

สมเหตุสมผล ในการกำหนดข้อสมมุติสำหรับกลศาสตร์เชิงสถิติ จะกำหนดจากสมมาตร (symmetry) ของฟังก์ชันคลื่นเป็นสำคัญ จึงแบ่งกลศาสตร์เชิงสถิติออกได้เป็น 2 แนวทาง คือ

1) กลศาสตร์เชิงสถิติแผนเดิม (classical statistical mechanics) เป็นการพิจารณาอนุภาคโดยไม่คำนึงถึงสมมาตรของฟังก์ชันคลื่นสำหรับอนุภาคนั้น อนุภาคพวกนี้จะมีโครงสร้างและองค์ประกอบเหมือนกันและสามารถบอกได้ว่าอนุภาคหนึ่งแตกต่างจากอีกอนุภาคหนึ่งอย่างเด่นชัด (identical and distinguishable particles) อนุภาคพวกนี้ เช่น โมเลกุลแก๊สต่างๆ

2) กลศาสตร์เชิงสถิติควอนตัม (quantum statistical mechanics) เป็นการพิจารณาอนุภาคในระบบหนึ่งๆ โดยคำนึงถึงสมมาตรของฟังก์ชันคลื่นสำหรับอนุภาคนั้น โดยที่อนุภาคนั้นมีโครงสร้างและองค์ประกอบเหมือนกันและไม่สามารถบอกความแตกต่างได้อย่างเด่นชัด

ทั้งนี้รายละเอียดของแต่ละแนวทางและการนำไปใช้อธิบายจะกล่าวถึงในบทต่อๆไป

6. ค่าเฉลี่ยและความคลาดเคลื่อน

จากการที่ค่าของสมบัติมหาทรรศน์ของระบบหนึ่ง ๆ เมื่อวัดแต่ละครั้งอาจจะได้ค่าที่แตกต่างกันไป จะต้องมีค่าที่เป็นตัวแทนสมบัติมหาทรรศน์ของระบบนั้น สำหรับค่าที่เป็นตัวแทนในทางสถิติที่นิยมใช้กันคือ ค่าเฉลี่ย (mean หรือ average value หรือ expectation value) ค่าเฉลี่ยในทางคณิตศาสตร์มี 3 ชนิดด้วยกัน คือ

6.1 ค่าเฉลี่ยเลขคณิต (arithmetic mean) เป็นค่าเฉลี่ยของผลรวมของข้อมูลทั้งหมด คือ

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{N} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 6$$

6.2 ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต (geometric mean) เป็นค่าเฉลี่ยที่ได้จากรากของผลคูณของข้อมูล คือ

$$\bar{x} = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 7$$

6.3 ค่าเฉลี่ยฮาร์มอนิค (harmonic mean) เป็นค่าเฉลี่ยของผลรวมของส่วนกลับของข้อมูลทั้งหมด คือ

$$\bar{x} = \frac{1}{\frac{1}{N}\sum\left(\frac{1}{x_i}\right)} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 8$$

สำหรับสมบัติมหาทรรศน์ในกลศาสตร์เชิงสถิติต้องใช้ค่าเฉลี่ยของสมบัติจุลทรรศน์ของระบบจุลทรรศน์ที่เป็นองค์ประกอบของระบบนั้น ค่าเฉลี่ยที่ใช้เป็นค่าเฉลี่ยเลขคณิต เช่น

ถ้าให้

ระบบหนึ่งมีสถานะทั้งหมด $=$ N

แต่ละสถานะมีจำนวน n_i มีสมบัติ $=$ X_i ซึ่งมีฟังก์ชัน เป็น $f(X_i)$

ค่าเฉลี่ยของสมบัตินี้จะเป็น

$$\bar{f} = \frac{1}{N}\left[\sum n_i f\left(X_i\right)\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 9$$

ถ้าเป็นระบบที่มีจำนวนสถานะมาก เช่นระบบที่มีจำนวนโมเลกุลจำนวนเป็นโมล (อันดับ 10^{23}) ค่าของสมบัติย่อมใกล้เคียงกันมาก จนสามารถอนุโลมให้ข้อมูลมีค่าต่อเนื่องที่เป็นฟังก์ชันต่อเนื่อง ค่าเฉลี่ยของสมบัติจะได้จากค่าเฉลี่ยของการปริพันธ์ฟังก์ชันของสถานะนั้น คือ

$$\bar{f} = \frac{1}{N}\int f(X_i)\,dn_i \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 10$$

เช่น พลังงานเฉลี่ย จะเป็น

$$\bar{E} = \frac{1}{N}\int E_i\,dn_i$$

ความเร็วเฉลี่ย จะเป็น

$$\bar{v} = \frac{1}{N}\int v_i\,dn_i$$

เป็นต้น

จากการที่ค่าเฉลี่ยเป็นตัวแทนของข้อมูลจากการทดลองทั้งหมด ค่าเฉลี่ยจึงเป็นค่าคงตัวของสมบัติหนึ่ง ๆ ของระบบ เนื่องจากข้อมูลจากการทดลองวัดสมบัติย่อมมีค่าแตกต่างกันไป ค่าของข้อมูลเหล่านี้จะต่างจากค่าเฉลี่ยตามการกระจายของข้อมูล เช่น ถ้าข้อมูลชุดหนึ่งมีค่าเป็น x_i มีค่าเฉลี่ยเป็น $\overline{X}$ ค่าเบี่ยงเบน (d)ของข้อมูลแต่ละค่า จะเป็น

$$d = x_i - \overline{X}$$

ซึ่งค่าเฉลี่ยของค่าเบี่ยงเบนกำลังสองเรียกว่า ความแปรปรวน (variance, σ^2) คือ

$$\sigma^2 = \frac{\sum\left(x_i - \overline{X}\right)^2}{N}$$

$$= \frac{\sum x_i^2}{N} - \left(\frac{\sum x_i}{N}\right)^2$$

$$= (x^2)_{average} - \overline{X}^2$$

ค่ารากที่สองที่เป็นค่าบวกของความแปรปรวน คือ ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (standard deviation, σ) คือ

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum\left(x_i - \overline{X}\right)^2}{N}}$$

$$= \sqrt{\left(x^2\right)_{average} - \overline{X}^2}$$

ค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานในทางสถิตินี้คือความไม่แน่นอนของตัวแปรตามหลักความไม่แน่นอนของไฮเซนแบร์ก นั่นเอง และเมื่อหารค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐานด้วยรากที่สองของจำนวนข้อมูล คือ ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน (standard error, S.E.) คือ

$$S.E. = \frac{\sigma}{N}$$

(Salkind(editor), 2007, p.943)

บทสรุป

การอธิบายสมบัติมหาทรรศน์ของระบบต้องอาศัยพื้นฐานความรู้ทางด้านสถิติศาสตร์เกี่ยวกับการนับจำนวนสิ่งตัวอย่าง ความน่าจะเป็น การแจกแจงความน่าจะเป็น การหาค่าเฉลี่ย ความแปรปรวน และค่าส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

แบบฝึกหัด

1. ในการทอดลูกเต๋า 2 ลูกคือ ลูกหนึ่งสีแดง อีกลูกหนึ่งสีขาว จงหา

ก. ปริภูมิสิ่งตัวอย่างของการหงายหน้าลูกเต๋าเป็นแต้มต่างๆ

ข. เหตุการณ์ A ที่ลูกเต๋าทั้งสองหงายหน้าได้แต้มรวมน้อยกว่า 6

ค. เหตุการณ์ B ที่ลูกเต๋าทั้งสองหงายหน้าได้แต้มรวมเป็น 6

ง. เหตุการณ์ C ที่ลูกเต๋าสีแดงหงายหน้าขึ้นเป็นแต้ม 3

จ. ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ A, B และ C

2. ข้อสอบวิชาหนึ่งเป็นข้อสอบแบบปรนัยเลือกคำตอบ ถูก-ผิด ถ้าข้อสอบมี 10 ข้อ นักเรียนคนหนึ่งจะมีวิธีการตอบคำถามได้กี่วิธี

3. จงหาวิธีการจัดเลข 4 หลักจากตัวเลขต่อไปนี้ 0,1,2,3,6,7

4. นักศึกษากลุ่มหนึ่งประกอบด้วยนักศึกษาชาย 8 คน นักศึกษาหญิง 5 คน ถ้าจะเลือกกรรมการจำนวน 6 คน จากนักศึกษาดังกล่าว จะเลือกได้กี่วิธี โดยที่

ก. เลือกโดยไม่มีข้อแม้ใดๆ

ข. กรรมการประกอบด้วยนักศึกษาชาย 3 คน นักศึกษาหญิง 2 คน

5. ในการทอดลูกเต๋า 3 ลูกพร้อมกัน จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกเต๋าทั้งสามหงายหน้าขึ้นได้แต้มรวมเป็น

ก. มากกว่า 11

ข. เท่ากับ 11

ค. น้อยกว่า 11

6. ถ้าระบบหนึ่งประกอบด้วยโมเลกุลของแก๊สชนิดหนึ่งจำนวนทั้งหมด N โมเลกุล จงหาความน่าจะเป็นในการบรรจุแก๊สทั้งหมดลงในสถานะต่างๆ จำนวน k สถานะ โดยที่

ก.ไม่จำกัดว่าสถานะหนึ่งๆ จะบรรจุแก๊สกี่โมเลกุลก็ได้

ข. สถานะหนึ่งสามารถบรรจุแก๊สได้เพียง 1 โมเลกุล

7. จงบอกว่า ตัวแปรต่อไปนี้เป็นตัวแปรสุ่มชนิดต่อเนื่องหรือไม่ต่อเนื่อง

ก.จำนวนไข่จากแม่ไก่ตัวหนึ่งในแต่ละเดือน

ข. ปริมาณน้ำที่ผลิตโดยการประปานครหลวงในแต่ละปี

ค. ความสูงของนักศึกษาหมู่เรียนหนึ่ง

ง. ระยะเวลาที่ใช้ในการเล่นกีฬาแต่ละวัน

8. ตัวแปรสุ่ม X เป็นตัวแปรสุ่มแบบต่อเนื่อง ระหว่าง $x = 2$ กับ $x = 5$ มีฟังก์ชันความหนาแน่น

$$f(x) = \frac{2(1+x)}{27}$$

จงหา

ก. Pr (X < 4)

ข. Pr (3 < X < 4)

9. จากข้อมูลต่อไปนี้ 5, 6, 4, 5, 8, 5 จงหา

ก. ค่าเฉลี่ยเลขคณิต

ข. ค่าเฉลี่ยเรขาคณิต

ค. ความแปรปรวน

ง. ส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน

จ. ความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน