

และ $\lambda = \frac{h}{p}$

$v = \lambda \nu$

$\lambda = \frac{v}{\nu}$

เพราะฉะนั้น

$\frac{v}{\nu} = \frac{h}{p}$

$\nu = \frac{p}{h}$

$\frac{v}{\nu^2} = \frac{h}{p^2}$

$\frac{v^2}{\nu^2} = \frac{p^2}{h^2}$

สมการ 22 จะเป็น

$\nabla^2 \psi = -\frac{4\pi^2 p^2}{h^2} \psi \dots\dots\dots 23$

ในกลศาสตร์แผนเดิม

$K = \frac{p^2}{2m}$

และพลังงานรวม(E)

$E = K + U$

$K = E - U$

$\frac{p^2}{2m} = E - U$

$p^2 = 2m(E - U)$

แทนค่า p^2 ลงในสมการ 23 จะได้

$\nabla^2 \psi = -\frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - U) \psi$

$= \frac{-2m}{\hbar^2} (E - U) \psi$

$\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0 \dots\dots\dots 24$

สมการ 24 เรียกว่า สมการของชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลา (Schrödinger's time independent wave equation)



Erwin Schrödinger

เมื่อจัดเรียงเสียใหม่ จะได้

$$\left(\frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U \right) \psi = E\psi \quad \dots\dots\dots 25$$

เทอมในเครื่องหมาย () สมการ 25 คือ ตัวดำเนินการที่เรียกว่า ตัวดำเนินการแฮมิลโทเนียน (Hamiltonian operator, \hat{H}) นั่นคือ

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U \quad \dots\dots\dots 26$$

สมการ 25 จึงเป็น

$$\hat{H}\psi = E\psi \quad \dots\dots\dots 27$$

เป็นอีกรูปหนึ่งของสมการชเรอดิงเงอร์ ลักษณะของสมการ 27 นี้เป็นสมการที่รู้จักกันทางคณิตศาสตร์ว่า สมการค่าเฉพาะ (eigen value equation) ซึ่งมีรูปทั่วไปเป็น

$$\hat{A}\phi = a\phi$$

- ซึ่ง \hat{A} เป็นตัวดำเนินการเจาะจง (eigen operator)
- a เป็นค่าคงตัว เรียกว่า ค่าเจาะจง (eigen value)
- ϕ เป็นฟังก์ชันเจาะจง (eigen function)

ตัวอย่างที่ 2.5 จงแสดงว่า e^{ikx} หรือ $\cos kx$ ที่เป็นฟังก์ชันเจาะจงของ $\frac{d}{dx}$

วิธีทำ กรณี e^{ikx} จะได้
$$\frac{d(e^{ikx})}{dx} = ik e^{ikx}$$

e^{ikx} เป็นฟังก์ชันเจาะจงของ $\frac{d}{dx}$

กรณี $\cos kx$ จะได้
$$\frac{d(\cos kx)}{dx} = -k \sin kx$$

$$\neq k \cos kx$$

$\cos kx$ จึงไม่เป็นฟังก์ชันเจาะจงของ $\frac{d}{dx}$

กรณีสมการชเรอดิงเงอร์ ฟังก์ชันคลื่น (ψ) เป็นฟังก์ชันเจาะจง (eigen function) และพลังงานรวม (E) เป็นค่าเจาะจง (eigen value) ซึ่งค่าของพลังงานรวมจะต้องสามารถหาค่าออกมาได้เป็นค่าจำนวนจริง (real value) แสดงให้เห็นว่าตัวดำเนินการแฮมิลโทเนียน (\hat{H}) นี้เป็นตัวดำเนินการชนิดหนึ่งของตัวดำเนินการ เอร์มิเทียน (Hermitian operator)

ส่วนอีกสมการหนึ่งจะเป็นสมการชเรอดิงเงอร์ที่ขึ้นกับเวลา (time - dependent Schrödinger equation) จะเป็น

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} E \psi = 0 \quad \dots\dots\dots 28$$

โดยฟังก์ชันคลื่น ψ ในสมการนี้เป็น

$$\psi = \psi(x,y,z,t)$$

ในที่นี้จะพิจารณาเฉพาะสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลา

3. การประยุกต์ใช้สมการชเรอดิงเงอร์

สมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลา คือ

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0$$

สมการนี้มีการนำมาใช้อธิบายการเคลื่อนที่ของอนุภาคในระดับจุลทรรศน์ (microscopic world) ได้ดี ทั้งนี้ขึ้นอยู่กับปัญหาที่ต้องการนำมาอธิบายว่าเป็นปัญหาอะไร โดยเฉพาะอนุภาคนั้นอยู่ภายใต้อิทธิพลของพลังงานศักย์ (U) แบบใด เช่น

- อนุภาคอิสระ (free particle)
 - อนุภาคภายในกล่องศักย์
 - อะตอมไฮโดรเจน
- ฯลฯ

3.1 อนุภาคอิสระ

อนุภาคอิสระเป็นอนุภาคที่ไม่อยู่ภายใต้อิทธิพลของศักย์ใดๆ นั่นคือ พลังงานศักย์ของอนุภาคนี้มีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้นถ้าสมมติว่า อนุภาคนี้มีการเคลื่อนที่ได้เพียง 1 มิติจะมีสมการชเรอดิงเงอร์เป็น

$$\frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi(x) = 0 \quad \dots\dots\dots 29$$

การที่อนุภาคอิสระไม่มีพลังงานศักย์ มีแต่พลังงานจลน์ แสดงว่า

$$\begin{aligned} \text{พลังงานรวม} &= \text{พลังงานจลน์ของอนุภาค} \\ E &= E_k \\ &= \frac{p^2}{2m} \end{aligned}$$

จากเรื่องคลื่นसार

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

ให้

k เป็นเลขคลื่นเชิงมุม (angular wave number) มีค่าเท่ากับ $\frac{2\pi}{\lambda}$ เพราะฉะนั้น

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{2\pi}{k} \\ \frac{2\pi}{k} &= \frac{h}{p} \\ p &= \hbar k \end{aligned} \dots\dots\dots 30$$

พลังงานรวมของอนุภาคอิสระจะเป็น

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \dots\dots\dots 31$$

แทนในสมการ 29

$$\frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + k^2 \psi = 0 \dots\dots\dots 32$$

เป็นสมการอนุพันธ์อันดับสอง มีผลเฉลย (solution) เป็น

$$\psi(x) = e^{ikx} \text{ หรือ } e^{-ikx}$$

ถ้าผลเฉลย เป็น

$$\psi(x) = e^{ikx}$$

หมายถึงอนุภาคอิสระที่มีโมเมนตัม $p = \hbar k$ เคลื่อนที่ไปในทิศทาง + x

แต่ถ้าผลเฉลย เป็น

$$\psi(x) = e^{-ikx}$$

หมายถึง อนุภาคอิสระที่มีโมเมนตัม $p = \hbar k$ เคลื่อนที่ไปในทิศทาง - x ที่น่าสังเกต คือ

ถ้า

$$\psi(x) = e^{ikx} \text{ จะมี } \psi^*(x) = e^{-ikx}$$

แต่ถ้า

$$\psi(x) = e^{-ikx} \text{ จะมี } \psi^*(x) = e^{ikx}$$

ทำให้

$$|\psi(x)|^2 = \psi^*(x) \psi(x) = e^{1kx} e^{-1kx} = 1$$

แสดงว่า ความน่าจะเป็นที่จะพบอนุภาค ณ จุดใดๆ บนแกน x จะเท่ากันหมดทุกจุด ดังนั้นผลเฉลยของสมการ 32 จึงสามารถเขียนในรูปผลรวมเชิงเส้น (linear combination) ของผลเฉลยทั้งสองเป็น

$$\psi(x) = A e^{1kx} + B e^{-1kx} \dots\dots\dots 33$$

ถ้าเป็นอนุภาคอิสระที่เคลื่อนที่ในปริภูมิ (space) x, y, z จะมีสมการชเรอดิงเงอร์ เป็น

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi = 0 \dots\dots\dots 34$$

กรณีนี้

$$\psi = \psi(x,y,z)$$

สมการ 34 จะมีผลเฉลยเป็น

$$\psi(x,y,z) = e^{1\vec{k} \cdot \vec{r}} \dots\dots\dots 35$$

เมื่อ

\vec{k} เป็นเวกเตอร์คลื่น (wave vector) ซึ่ง

$$k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$$

$$\vec{k} = k_x \hat{i} + k_y \hat{j} + k_z \hat{k}$$

\vec{r} เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่ง (positional vector) ซึ่งในระบบพิกัดฉาก

$$\vec{r} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$$

เมื่อ

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ เป็นเวกเตอร์หนึ่งหน่วย (unit vector) ในแนว x,y,z ตามลำดับ

ดังนั้น

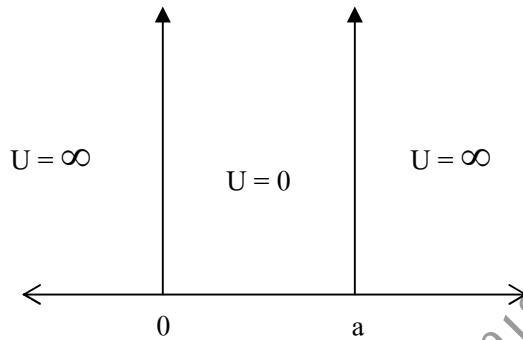
$$\vec{k} \cdot \vec{r} = k_x x + k_y y + k_z z$$

เมื่อ

k_x, k_y, k_z เป็นส่วนประกอบ (components) ของเวกเตอร์คลื่นในแนวแกน x,y,z ตามลำดับ

3.2 อนุภาคในกล่องศักย์ (Particle in a Potential Box)

เป็นปัญหาเกี่ยวกับอนุภาคที่ต่อเนื่องกับอนุภาคอิสระ โดยสมมติว่า มีอนุภาคหนึ่งมีพลังงานศักย์เป็นศูนย์ถูกจำกัดให้อยู่แต่ภายในกล่อง 1 มิติที่มีความยาวเท่ากับ a และเพื่อให้อนุภาคอยู่แต่เฉพาะภายในกล่องเท่านั้นจึงให้พลังงานศักย์ภายนอกกล่องมีค่าอนันต์ (∞) ดังรูป 2.2



รูปที่ 2.2 อนุภาคภายในกล่องศักย์ 1 มิติ

จะเห็นว่า ความน่าจะเป็นที่จะพบอนุภาคจึงอยู่ในช่วงที่ x มีค่าระหว่าง 0 กับ a เท่านั้น ที่ $a < x < 0$ เราจะไม่มีโอกาสพบอนุภาคนี้ ดังนั้น

$$\psi(x) = 0 \text{ เมื่อ } a < x < 0 \quad \dots\dots\dots 36$$

ความสัมพันธ์ตามสมการ 36 นี้ เรียกว่า เงื่อนไขขอบเขต (boundary condition) สำหรับอนุภาคในกล่องศักย์ 1 มิติ ส่วนสมการชเรอดิงเงอร์ของอนุภาคนี้จะเป็นเช่นเดียวกับอนุภาคอิสระคือ

$$\frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} E \psi(x) = 0$$

และ

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + k^2 \psi(x) &= 0 \\ \psi(x) &= A e^{1kx} + B e^{-1kx} \end{aligned}$$

จากเงื่อนไขขอบเขตในสมการ 36

ที่ $x = 0$

$$\psi(x) = 0$$

จะได้

$$0 = A + B$$

$$A = -B$$

ดังนั้น

$$\psi(x) = A (e^{ikx} - e^{-ikx})$$

ใช้ความสัมพันธ์ของออยเลอร์ (Euler's relation) คือ

$$\begin{aligned} e^{ikx} &= \cos kx + i \sin kx \\ e^{-ikx} &= \cos kx - i \sin kx \\ e^{ikx} - e^{-ikx} &= 2i \sin kx \end{aligned}$$

จะได้

$$\psi(x) = A 2i \sin kx = C \sin kx \dots\dots\dots 37$$

และอีกเงื่อนไขขอบเขตหนึ่ง คือ

$$\text{ที่ } x = a \quad \psi(a) = 0$$

จากสมการ 37 จะได้

$$0 = C \sin ka$$

ดังนั้น C ต้องไม่เท่ากับ 0 แสดงว่า

$$\sin ka = 0$$

หมายความว่า

$$ka = 0, \pi, 2\pi, \dots$$

นั่นคือ

$$ka = n\pi \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$k = \frac{n\pi}{a}$$

แทนค่า k ลงในสมการ 30, 31 และ 37 จะได้

$$p_n = \frac{n\pi\hbar}{a} \dots\dots\dots 38$$

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \dots\dots\dots 39$$

และ

$$\psi(x) = C \sin \frac{n\pi x}{a} \dots\dots\dots 40$$

การหาค่า C จะหาจากเงื่อนไขการทำให้เป็นปรกติ (สมการ 16) คือ

$$\int_0^a \left| C \sin \frac{n\pi x}{a} \right|^2 dx = 1$$

$$C^2 \int_0^a \sin^2 \frac{n\pi x}{a} dx = 1$$

$$C^2 \left(\frac{1}{2} a \right) = 1$$

$$C = \sqrt{\frac{2}{a}}$$

ฟังก์ชันคลื่นสมการ 40 จะเป็น normalized wave function ของอนุภาคในกล่องศักย์ 1 มิติ เป็น

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi x}{a} \dots\dots\dots 41$$

ถ้าเป็นกล่องศักย์รูปลูกบาศก์ 3 มิติ มีด้านแต่ละด้านยาวเท่ากับ a กรณีนี้ ฟังก์ชันคลื่นจะเป็น

$$\psi = \psi(x, y, z)$$

และสมการชเรอดิงเงอร์จะเป็น

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{2m}{\hbar} E \psi = 0$$

จะมีผลเฉลยเป็น

$$\psi = e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

โดย

$$k_x = \frac{n_x \pi}{a}$$

$$k_y = \frac{n_y \pi}{a}$$

$$k_z = \frac{n_z \pi}{a}$$

ดังนั้น

$$\left. \begin{aligned} p_x &= n_x \frac{\pi \hbar}{a} \\ p_y &= n_y \frac{\pi \hbar}{a} \\ p_z &= n_z \frac{\pi \hbar}{a} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 42$$

และ

$$\begin{aligned} E &= \frac{p^2}{2m} = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) \\ &= \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \dots\dots\dots 43 \end{aligned}$$

ส่วนฟังก์ชันคลื่นก็จะได้

$$\psi = C \sin \frac{n_x \pi x}{a} \sin \frac{n_y \pi y}{a} \sin \frac{n_z \pi z}{a} \dots\dots 44$$

เมื่อ n_x, n_y และ n_z คือ จำนวนเต็มตามแนวแกน x, y, z ตามลำดับ

ให้

$$\chi^2 = n_x^2 + n_y^2 + n_z^2$$

ดังนั้น χ จึงเป็นเหมือนกับเวกเตอร์ใดๆ ที่มีส่วนประกอบเป็น n_x, n_y และ n_z ตามแนวแกน x, y, z ตามลำดับ สมการ 43 จะเป็น

$$\begin{aligned} E &= \frac{\pi^2 \hbar^2}{2ma^2} \chi^2 \\ \chi &= \sqrt{\frac{2ma^2 E}{\pi^2 \hbar^2}} \end{aligned}$$

เราจะสามารถหาจำนวนสถานะ (states) ที่มีค่าพลังงานตั้งแต่ 0 ถึง E ในปริภูมิ xyz ได้จากปริมาตรของหนึ่งอัฐภาค (octant) ของทรงกลมที่มีรัศมีเท่ากับ χ นั่นคือ

$$\begin{aligned} N(E) &= \frac{1}{8} \left(\frac{4}{3} \pi \chi^3 \right) = \frac{1}{6} \pi \chi^3 \\ &= \frac{1}{6} \pi \left(\frac{2ma^2 E}{\pi^2 \hbar^2} \right)^{3/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N(E) &= \frac{1}{6} \pi a^3 \left(\frac{2mE}{\pi^2 \hbar^2} \right)^{3/2} \\
 &= \frac{\pi}{6} V \left(\frac{2mE}{\pi^2 \hbar^2} \right)^{3/2} \\
 &= \frac{8\pi V}{3h^3} (2m^3)^{1/2} E^{3/2}
 \end{aligned}$$

เมื่อ $N(E)$ คือ จำนวนสถานะที่มีค่าพลังงาน 0 ถึง E

V คือ ปริมาตรของกลุ่มรูปลูกบาศก์ซึ่งเท่ากับ a^3

ส่วนจำนวนสถานะที่มีพลังงานระหว่าง E กับ $E + dE$ จะได้จาก

$$dN(E) = \frac{4\pi v(2m^3)^{(1/2)}}{h^3} E^{1/2} dE \quad \dots\dots\dots 45$$

ให้ $g(E)$ คือจำนวนสถานะที่มีพลังงาน E ต่อช่วงพลังงานหนึ่งหน่วย นั่นคือ

$$\begin{aligned}
 g(E) &= \frac{dN}{dE} \\
 &= \frac{4\pi v(2m^3)^{(1/2)}}{h^3} E^{1/2} \quad \dots\dots\dots 46
 \end{aligned}$$

หรืออาจกล่าวได้ว่า $g(E)$ คือความหนาแน่นของระดับพลังงานหรือสถานะที่มีพลังงาน E นั่นเอง ซึ่งบางครั้งเราอาจจะหาความหนาแน่นของสถานะที่มีโมเมนตัมระหว่าง p กับ $p + dp$ เป็น

$$\begin{aligned}
 g(p) &= \frac{dN}{dp} \\
 &= \frac{4\pi v}{h^3} p^2 \quad \dots\dots\dots 47
 \end{aligned}$$

3.3 อะตอมไฮโดรเจน (Hydrogen Atom)

ปัญหาของอะตอมไฮโดรเจนเป็นปัญหาของอนุภาค (คืออิเล็กตรอน) อยู่ภายใต้สนามของแรงจากศูนย์กลาง (central force field) ที่เกิดจากประจุบวกของนิวเคลียส มีพลังงานศักย์เป็น

$$U = -\frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{Ze^2}{r}$$

จะมีสมการชเรอดิงเงอร์เป็น

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{2m}{\hbar} \left(E + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \right) \psi = 0$$

ซึ่งฟังก์ชันคลื่น เป็น $\psi = \psi(x, y, z)$ คือมีตัวแปร x y และ z ของระบบพิกัดฉากรวมอยู่ด้วยกัน ในการหาผลเฉลยของสมการชเรอดิงเงอร์สำหรับไฮโดรเจนนี้จะต้องทำการแปลงระบบพิกัดของตัวดำเนินการลาปลาเซียน (∇^2) จากระบบพิกัดฉากให้อยู่ในระบบพิกัดเชิงขั้ว (polar coordinate system) คือ

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right)$$

ดังนั้นสมการชเรอดิงเงอร์สำหรับอะตอมไฮโดรเจนจึงได้

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0$$

..... 48

ให้

$$\psi(r, \theta, \varphi) = R(r) \Theta(\theta) \Phi(\varphi) \quad \text{..... 49}$$

เมื่อ

$R(r)$ เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับระยะห่างของอิเล็กตรอนกับนิวเคลียสเท่านั้น

$\Theta(\theta)$ เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับมุม θ เท่านั้น

$\Phi(\varphi)$ เป็นฟังก์ชันที่ขึ้นอยู่กับมุม φ เท่านั้น

ใช้วิธีการแยกตัวแปร (technique of separation) ด้วยการเพิ่มค่าคงตัวในการแยกตัวแปร (separation constants) จะแยกสมการ 48 ออกเป็น 3 สมการคือ

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + m^2 \Phi = 0 \quad \text{..... 50}$$

$$\frac{m^2}{\sin^2 \theta} \Theta - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) - 1(1+1)\Theta = 0 \quad \text{..... 51}$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r} \right) + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) R - \frac{1(1+1)}{r^2} R = 0 \quad \text{..... 52}$$

เมื่อ m และ 1 คือค่าคงตัวในการแยกตัวแปร สมการทั้งสามมีผลเฉลยดังนี้

สมการ 50 จะมีผลเฉลยเป็น

$$\Phi(\varphi) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} e^{\pm im\varphi} \dots\dots\dots 53$$

สำหรับสมการ 51 เมื่อให้ $x = \sin\theta$ ก็จะได้สมการคณิตศาสตร์เรียกว่า สมการของเลอจองด์สัมทบ (Associated Legendre's Equation) มีผลเฉลยเป็น

$$\Theta_{l,m}(\theta) = \sqrt{\frac{(2l+1)(1-|m|)!}{2(1+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos\theta) \dots\dots\dots 54$$

เมื่อ

$P_l^{|m|}(\cos\theta)$ เป็นฟังก์ชันเรียกว่า ฟังก์ชันเลอจองด์สัมทบ (Associated Legendre Function) ที่องศา l อันดับที่ m

สมการ 52 ถ้าให้

$$\rho = \left(\frac{2Z}{nr_0} \right) r$$

จะแปลงเป็นสมการที่เรียกว่า สมการของลาแกร์สัมทบ (Associated Laguerre's Equation) มีผลเฉลยเป็น

$$R_{n,l}(r) = \sqrt{\left(\frac{2Z}{nr_0} \right)^3 \frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]}} e^{-\rho/2} \rho^l L_{n+l}^{2l+1}(\rho) \dots\dots\dots 55$$

เมื่อ

$L_{n+l}^{2l+1}(\rho)$ เป็นฟังก์ชันเรียกว่า ฟังก์ชันลาแกร์สัมทบ (Associated Laguerre's Equation) และเมื่อแทนผลเฉลยต่างๆ ของสมการทั้งสามนี้ลงในสมการ 49 ก็จะได้ normalized wave functions ($\psi_{n,l,m}$) ของอะตอมไฮโดรเจน ดังตารางที่ 2.1

ตารางที่ 2.1 Normalized Wave functions ($\psi_{n,l,m}$) ของอะตอมไฮโดรเจน

$$\psi_{1,0,0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} e^{-\sigma}$$

$$\psi_{2,0,0} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} (2 - \sigma) e^{-\sigma/2}$$

$$\psi_{2,1,0} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} \sigma e^{-\sigma/2} \cos \theta$$

$$\psi_{2,1,1} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} \sigma e^{-\sigma/2} \sin \theta \cos \varphi$$

$$\psi_{2,1,-1} = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \left(\frac{Z}{a_0} \right)^{3/2} \sigma e^{-\sigma/2} \sin \theta \sin \varphi$$

ฯลฯ

เมื่อ $\sigma = \left(\frac{Z}{a_0} \right) r$

ฟังก์ชันคลื่นต่างๆ เหล่านี้จะเห็นว่า เป็นฟังก์ชันที่เกิดจากปริภูมิในพิกัดเชิงขั้ว (r, θ, φ) เราจึงจัดเป็นฟังก์ชันคลื่นเชิงปริภูมิ (spatial wave functions) เราเรียกฟังก์ชันเหล่านี้ว่า ออร์บิทัลเชิงอะตอม (atomic orbitals) ส่วนค่าคงตัวที่ถูกเพิ่มเข้าไปในการแยกตัวแปรคือ n, l และ m นั้นเป็นเลขที่มีนัยสำคัญต่อออร์บิทัลเชิงอะตอม เราเรียกว่า เลขควอนตัม (quantum numbers) ดังนี้

n เรียกว่า principal quantum number เป็นจำนวนเต็มแสดงถึงระดับพลังงาน (energy level) ของอิเล็กตรอน โดย $n = 1, 2, 3, \dots$

l เรียกว่า orbital quantum number เป็นจำนวนเต็มที่มีค่า

$$l = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

ค่า l จะบอกถึงชนิดของระดับพลังงานย่อย (subenergy level หรือ subshell) เช่น

$$l = 0 \text{ หมายถึง } s\text{-subshell}$$

$$l = 1 \text{ หมายถึง } p\text{-subshell}$$

$$l = 2 \text{ หมายถึง } d\text{-subshell}$$

$$l = 3 \text{ หมายถึง } f\text{-subshell}$$

$$l = 4 \text{ หมายถึง } g\text{-subshell}$$

m เรียกว่า magnetic quantum number เป็นค่าแสดงถึงภาวะการวางทิศ (orientations) ของระดับพลังงานย่อยในปริภูมิพิกัดฉาก ซึ่งก็คือ ออร์บิทัลเชิงอะตอมนั่นเอง เช่น ใน p - subshell

ถ้า $m = 0$ แสดงถึงออร์บิทัลนั้นอยู่ในแนวแกน z

ถ้า $m = 1$ แสดงถึงออร์บิทัลนั้นอยู่ในแนวแกน x

ถ้า $m = -1$ แสดงถึงออร์บิทัลนั้นอยู่ในแนวแกน y

ดังนั้น

$\psi_{1,0,0}$ หมายถึง $1s$ - orbital

$\psi_{2,0,0}$ หมายถึง $2s$ - orbital

$\psi_{2,1,1}$ หมายถึง $2p_x$ - orbital

$\psi_{2,1,-1}$ หมายถึง $2p_y$ - orbital

$\psi_{2,1,0}$ หมายถึง $2p_z$ - orbital

จะเห็นว่า ค่าของ m จึงมีค่าเป็น

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$$

จำนวนค่าของ m จึงมีได้ $2l + 1$ ค่า เรียกว่า สภาพซ้อนสถานะ (degeneracy)

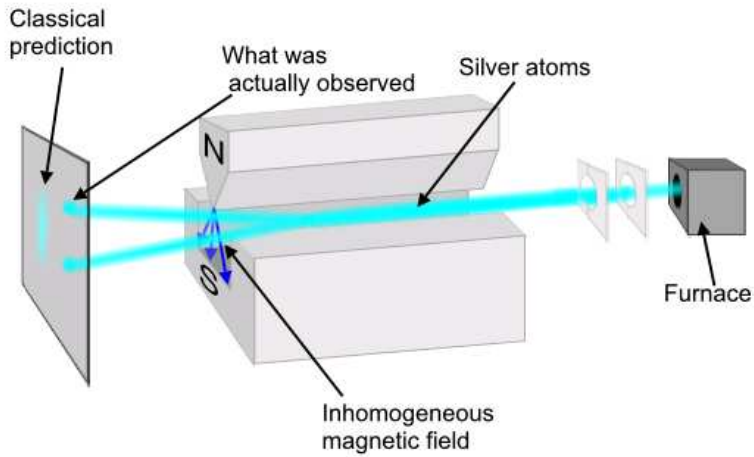
4. อิเล็กตรอนสปิน (Electron Spin)

ระบบมหาทรรศน์ ไม่ว่าจะเป็น ดาวฤกษ์ ดาวเคราะห์ แกแล็กซี่ จะพบว่า มีการเคลื่อนที่ 2 แบบ คือ

- การโคจรรอบจุดศูนย์กลางของระบบ (orbital motion)
- การหมุนรอบแกนตัวเอง (spin motion)

ในระบบจตุรทรรศน์ เช่น โมเลกุล อะตอม นิวเคลียส อิเล็กตรอน ฯลฯ ก็จะต้องมีการเคลื่อนที่ทั้งสองแบบเช่นกัน นิวเคลียสก็จะต้องมีทั้ง orbital motion และ nuclear spin อิเล็กตรอนก็ต้องมีทั้ง orbital motion และอิเล็กตรอนสปิน เป็นต้น

แนวความคิดของการเกิดอิเล็กตรอนสปินนั้น เป็นผลมาจากการทดลองของสเตอร์น - เจอลาช (Stern-Gerlach's experiment) ในปี พ.ศ. 2467 ซึ่งได้ทดลองผ่านลำ (beam) ของไอเงินเข้าไปในสนามแม่เหล็กไม่เป็นเอกพันธ์ (inhomogeneous magnetic field) ปรากฏว่า หลังจากผ่านสนามแม่เหล็กนี้แล้วลำของไอเงินเกิดการแตกออก (split) เป็น 2 ลำ ดังรูปที่ 2.3

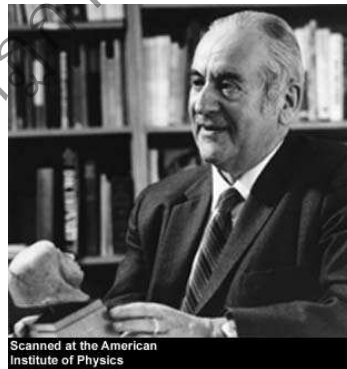


รูปที่ 2.3 การทดลองของสเติร์น – เจอลาซ (ที่มา Wikimedia Commons)

ต่อมาปี พ.ศ. 2469 อูห์เลนเบก (G. Uhlenbeck) และเกาค์สมิท (S. Goudsmit)



George Uhlenbeck



Samuel Goudsmit

ได้อธิบายการเกิดสเปกตรัมของพวกอะตอมที่เหมือนไฮโดรเจนด้วยอิเล็กตรอนสปิน และการทดลองของสเติร์น-เจอลาซก็สามารถอธิบายได้ด้วยอิเล็กตรอนสปินเช่นกัน โดยพวกเขาอธิบายว่า เมื่ออิเล็กตรอนเกิดการสปินย่อมต้องมีโมเมนตัมเชิงมุมของสปิน (spin angular momentum, \vec{S}) แต่ว่าอิเล็กตรอนเป็นอนุภาคที่มีประจุไฟฟ้าเมื่อเกิดการสปินก็ย่อมจะเกิดโมเมนต์แม่เหล็กขั้วคู่ของสปิน (spin magnetic dipole moment, \vec{M}_s) โดยมีความสัมพันธ์กับโมเมนตัมเชิงมุมของสปินเป็น

$$\vec{M}_s = -g_s \frac{e}{2m} \vec{S} \dots\dots\dots 56$$

เมื่อ g_s คือ gyromagnetic ratio ของอิเล็กตรอนซึ่งมีค่าเท่ากับ 2.0024
 m คือ มวลของอิเล็กตรอน

จากการทดลองของ สเติร์น – เจอราช ที่สนามแม่เหล็กไม่เป็นเอกพันธ์สามารถแตกลำอะตอม (atomic beams) ออกเป็น 2 ลำ แสดงว่า การสปินของอิเล็กตรอนมี 2 ภาวะการวางทิศ (orientations) ซึ่งจำนวนภาวะการวางทิศ จะหาได้จาก

$$g = 2s + 1$$

เมื่อ g คือ จำนวนภาวะการวางทิศ ซึ่งเท่ากับ 2
จะได้

$$s = \frac{1}{2}$$

ซึ่ง

s คือ เลขควอนตัมชนิดหนึ่งเรียกว่า spin quantum number ซึ่งเลขควอนตัมนี้สัมพันธ์กับโมเมนตัมเชิงมุมของสปิน (\vec{S}) ด้วย

$$\begin{aligned} S^2 &= s(s+1) \hbar^2 \\ &= \frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)\hbar^2 = \frac{3}{4}\hbar^2 \end{aligned} \dots\dots\dots 57$$

แต่ว่าโมเมนตัมเชิงมุมของสปิน (\vec{S}) เป็นปริมาณเวกเตอร์ซึ่งมีส่วนประกอบตามแกนต่างๆ ในพิกัดฉากเป็น S_x, S_y, S_z โดย

$$S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$$

ถ้า

$$\begin{aligned} S_x^2 &= S_y^2 = S_z^2 \\ S^2 &= 3S_z^2 \end{aligned}$$

จากสมการ 57 ก็จะได้

$$\begin{aligned} S_z^2 &= \frac{1}{4}\hbar^2 \\ S_z &= \pm \frac{1}{2}\hbar \end{aligned}$$

ให้

$$m_s = \pm \frac{1}{2}$$

นั่นคือ m_s คือ เลขควอนตัมที่ตรงกับโมเมนตัมเชิงมุมของสปินในแนวแกน Z (S_z) โดย

$$m_s = +\frac{1}{2} \text{ เป็นเลขควอนตัมของการสปินที่มีทิศทางในแนวชี้ขึ้น (spin-up)}$$

และ

$$m_s = -\frac{1}{2} \text{ เป็นเลขควอนตัมของการสปินที่มีทิศทางในแนวชี้ลง (spin-down)}$$

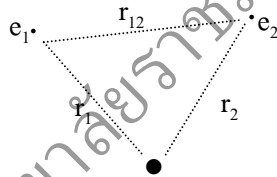
เมื่อเป็นเช่นนี้จึงเกิดฟังก์ชันคลื่นอีกชนิดหนึ่งคือ ฟังก์ชันคลื่นเชิงสปิน (spin wave function, χ_{m_s}) และฟังก์ชันคลื่นที่สมบูรณ์ก็ต้องมีทั้งฟังก์ชันคลื่นเชิงปริภูมิและฟังก์ชันคลื่นเชิงสปิน เป็น

$$\psi = \psi_{n,l,m} \chi_{m_s} \dots\dots\dots 58$$

โดย $\psi_{n,l,m}$ เป็นฟังก์ชันคลื่นเชิงออร์บิทัล χ_{m_s} เป็นฟังก์ชันคลื่นเชิงสปิน

5. อะตอมฮีเลียม (Helium atom)

อะตอมฮีเลียมเป็นระบบอะตอมที่มี 2 อิเล็กตรอน 1 นิวเคลียส ดังรูป 2.3



รูป 2.3 อะตอมฮีเลียม

จะต้องมีพลังงานศักย์ (U) ถึง 2 ส่วนคือ

1. ส่วนที่เกิดจากการดึงดูดกันระหว่างนิวเคลียสกับอิเล็กตรอนทั้งสองคือ $\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_1}$ กับ

$$\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_2}$$

2. ส่วนที่เกิดจากการผลักกันของอิเล็กตรอนทั้งสองคือ $\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r_{12}}$

ดังนั้น

$$U = \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_{12}} \right] \dots\dots\dots 59$$

ทำให้การแก้สมการชเรอดิงเงอร์ของอะตอมฮีเลียมยุ่งยาก ไม่สามารถแก้สมการออกมาได้อย่างแม่นยำตรง
 จะต้องแก้สมการโดยการทำการประมาณ (approximation)

นอกจากนี้ ยังมีปัญหาเกี่ยวกับฟังก์ชันคลื่นของอะตอมฮีเลียมเราก็ต้องนำมาพิจารณาโดย
 ให้

a เป็นเลขควอนตัม n, l, m_l ที่สถานะหนึ่ง

b เป็นเลขควอนตัม n, l, m_l อีกสถานะหนึ่ง

ดังนั้น ฟังก์ชันคลื่นเชิงออร์บิทัล (ψ) ของอิเล็กตรอนก็จะเป็น

$\psi_a(1)$ เป็นฟังก์ชันคลื่นของอิเล็กตรอน (1) ที่สถานะ a

$\psi_b(1)$ เป็นฟังก์ชันคลื่นของอิเล็กตรอน (1) ที่สถานะ b

$\psi_a(2)$ เป็นฟังก์ชันคลื่นของอิเล็กตรอน (2) ที่สถานะ a

$\psi_b(2)$ เป็นฟังก์ชันคลื่นของอิเล็กตรอน (2) ที่สถานะ b

ฟังก์ชันคลื่นเชิงออร์บิทัลของอะตอม (ψ_{atom}) จะได้จากฟังก์ชันคลื่นของอิเล็กตรอนรวมกันคือ

$$\psi_a(1) \psi_b(2) \text{ และ } \psi_a(2) \psi_b(1) \dots\dots\dots 60$$

จากการตีความของบอร์น เราทราบว่า $|\psi|^2$ จะบอกถึงความน่าจะเป็นที่จะพบอนุภาค (คืออิเล็กตรอน)
 และสมมาตรของการสลับที่อิเล็กตรอนทำให้ได้ว่า ฟังก์ชันคลื่นเชิงออร์บิทัลของอะตอมฮีเลียมได้จาก
 ผลรวมเชิงเส้นของฟังก์ชันคลื่นทั้งสองในสมการ 60 คือ

$$\psi_{atom} = \psi_a(1)\psi_b(2) \pm \psi_a(2)\psi_b(1) \dots\dots\dots 61$$

โดยฟังก์ชันคลื่น

$$\psi(1,2) = \psi_a(1)\psi_b(2) + \psi_a(2)\psi_b(1)$$

เมื่อเกิดการสลับที่อิเล็กตรอนจะเป็น

$$\psi(2,1) = \psi_a(2)\psi_b(1) + \psi_a(1)\psi_b(2)$$

ฟังก์ชันที่ได้ยังคงเหมือนเดิม แสดงว่า ฟังก์ชันคลื่นนี้เป็นฟังก์ชันคลื่นที่สมมาตร (symmetric) ต่อการ
 สลับที่อิเล็กตรอน จึงเรียกว่า ฟังก์ชันคลื่นสมมาตร (ψ_s)

$$\psi_s = \psi_a(1)\psi_b(2) + \psi_a(2)\psi_b(1) \dots\dots\dots 62$$

ส่วนฟังก์ชันคลื่นที่เป็น

$$\psi(1,2) = \psi_a(1)\psi_b(2) - \psi_a(2)\psi_b(1)$$

เมื่อสลับที่อิเล็กตรอนจะได้เป็น

$$\begin{aligned}\psi(2,1) &= \psi_a(2)\psi_b(1) - \psi_a(1)\psi_b(2) \\ &= -[\psi_a(1)\psi_b(2) - \psi_a(2)\psi_b(1)] \\ &= -\psi(1,2)\end{aligned}$$

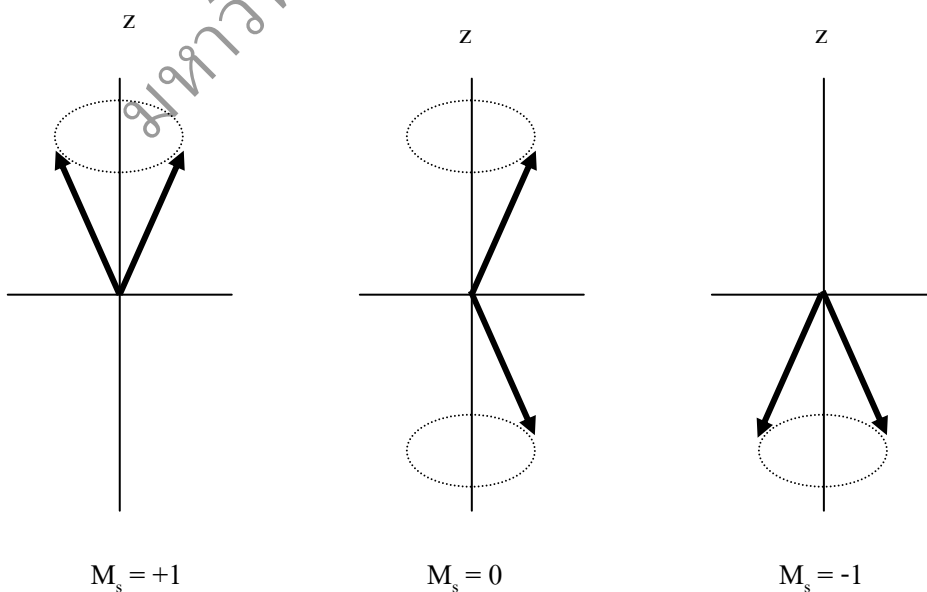
ฟังก์ชันคลื่นนี้เป็นปฏิสมมาตร (antisymmetric) ต่อการสลับที่อิเล็กตรอน เราเรียกว่า ฟังก์ชันคลื่นปฏิสมมาตร (ψ_A)

$$(\psi_A) = \psi_a(1)\psi_b(2) - \psi_a(2)\psi_b(1) \dots\dots\dots 63$$

จะเห็นว่า ฟังก์ชันคลื่นเชิงออร์บิทัลของอะตอมฮีเลียมมีได้ 2 รูปตามสมการ 62 กับ 63 ส่วนฟังก์ชันคลื่นเชิงสปิน (χ) นั้นเราจะพิจารณาดังนี้

เนื่องจากแต่ละอิเล็กตรอนมีค่าสปิน (s) เท่ากับ $\pm\frac{1}{2}$ สำหรับอะตอมฮีเลียมซึ่งมี 2 อิเล็กตรอน จะได้สปินรวม (S) ที่เป็นไปได้ 2 ค่า คือ $S = 1, 0$ เพราะว่าการวางทิศของเวกเตอร์สปินของอิเล็กตรอนมีได้ 2 แบบคือ

1. แบบขนาน (parallel) ซึ่งให้ $S = 1$ จะมีเวกเตอร์สปินลัพธ์ (resultant vector spin, M_s) ได้ 3 ภาวะการวางทิศทาง คือ $M_s = 1, 0, -1$ ดังรูป 2.4



รูปที่ 2.4 สปินแบบขนานในอะตอมฮีเลียม

เราเรียกสถานะสปิน (spin state) นี้ว่า **ชุดสาม** (triplet) จะมีฟังก์ชันคลื่นเชิงสปินที่เป็นสมมาตรมีได้ 3 ฟังก์ชันคลื่นคือ

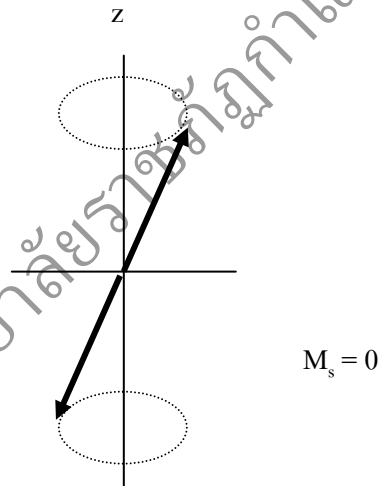
$$\chi_s = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}}[\chi_+(1)\chi_-(2) + \chi_+(2)\chi_-(1)] & M_s = 0 \\ \chi_+(1)\chi_+(2) & M_s = 1 \\ \chi_-(1)\chi_-(2) & M_s = -1 \end{cases}$$

เมื่อ

χ_+ คือฟังก์ชันคลื่นเชิงสปินของอิเล็กตรอนที่มี m_s เป็นบวก

χ_- คือฟังก์ชันคลื่นเชิงสปินของอิเล็กตรอนที่มี m_s เป็นลบ

2. แบบขนานสวน (antiparallel) จะให้ $S = 0$ จะมีเวกเตอร์สปินลัพธ์ได้เพียง 1 ภาวะการวางทิศ คือมี $M_s = 0$ ดังรูป 2.5



รูปที่ 2.5 สปินแบบขนานสวนในอะตอมฮีเลียม

เราเรียกสถานะสปินนี้ว่า **ชุดเดียว** (singlet) มีฟังก์ชันคลื่นเชิงปฏิสมมาตร (antisymmetric) มี 1 ฟังก์ชันคลื่น คือ

$$\chi_A = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\chi_+(1)\chi_-(2) - \chi_+(2)\chi_-(1) \right]$$

เมื่อรวมฟังก์ชันคลื่นเชิงออร์บิทัลกับฟังก์ชันคลื่นเชิงสปินเป็นฟังก์ชันคลื่นรวม จากสมการ 58

$$\psi = \psi_{nlm} \chi_{m_s}$$

จะสามารถจัดหมู่ได้ 4 แบบ คือ $\psi_s \chi_s$, $\psi_s \chi_A$, $\psi_A \chi_s$ และ $\psi_A \chi_A$

แต่จากการตรวจสอบระดับพลังงานของอะตอมฮีเลียมพบว่าถ้าฟังก์ชันคลื่นเชิงออร์บิทัล (ψ) เป็นฟังก์ชันคลื่นสมมาตร (ψ_s) ฟังก์ชันคลื่นเชิงสปิน (χ) จะต้องเป็นฟังก์ชันคลื่นปฏิสมมาตร (χ_A) แต่ถ้าฟังก์ชันคลื่นเชิงออร์บิทัลเป็นฟังก์ชันคลื่นปฏิสมมาตร (ψ_A) ฟังก์ชันคลื่นเชิงสปินจะต้องเป็นฟังก์ชันคลื่นสมมาตร (χ_s) นั่นก็แสดงว่า ฟังก์ชันคลื่นรวมของอะตอมฮีเลียมมี 2 รูปแบบ คือ

1) $\psi = \psi_s \chi_A$ จะมีเพียง 1 ฟังก์ชันเพราะ χ_A มี 1 ฟังก์ชันเป็นชุดเดี่ยว อะตอมฮีเลียมของฟังก์ชันคลื่นนี้คือ parahelium

2) $\psi = \psi_A \chi_s$ จะมีได้ 3 ฟังก์ชันเพราะ χ_s มี 3 ฟังก์ชันเป็นชุดสาม อะตอมฮีเลียมของฟังก์ชันนี้เราเรียกว่า orthohelium

ฟังก์ชันคลื่นของ parahelium มี 1 ฟังก์ชันคือ

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_s \chi_A \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\psi_a(1)\psi_b(2) + \psi_a(2)\psi_b(1) \right] \left[\chi_+(1)\chi_-(2) - \chi_+(2)\chi_-(1) \right] \end{aligned}$$

ฟังก์ชันคลื่นของ orthohelium มี 3 ฟังก์ชันคือ

$$\begin{aligned} 1) & \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\psi_a(1)\psi_b(2) - \psi_a(2)\psi_b(1) \right] \left[\chi_+(1)\chi_-(2) + \chi_+(2)\chi_-(1) \right] \\ 2) & \left[\psi_a(1)\psi_b(2) - \psi_a(2)\psi_b(1) \right] \chi_+(1)\chi_+(2) \\ 3) & \left[\psi_a(1)\psi_b(2) - \psi_a(2)\psi_b(1) \right] \chi_-(1)\chi_-(2) \end{aligned}$$

สรุปแล้ว “ฟังก์ชันคลื่นรวมของอะตอมฮีเลียมจะมีลักษณะเป็นปฏิสมมาตร” (เพราะเกิดจากสมมาตรคูณกับปฏิสมมาตร) จากข้อสรุปนี้เอง นักฟิสิกส์ชาวสวิสชื่อ เพลลี (Wolfgang Pauli)



Wolfgang Pauli

ได้นำไปตั้งเป็นหลักการเรียกว่า หลักกีดกันของเพาลี (Pauli's exclusion principle) มีใจความว่า “ในอะตอมหนึ่งจะต้องไม่มีอิเล็กตรอน 2 อิเล็กตรอนที่มีชุดของเลขควอนตัม (n, l, m_l, m_s) ซ้ำกันครบทั้ง 4 ค่า”

จากหลักกีดกันเพาลีแสดงว่า ที่ n, l, m_l , และ m_s หนึ่งก็คือสถานะหนึ่งแต่พอ n หรือ l หรือ m_l หรือ m_s เปลี่ยนไปเพียงค่าใดค่าหนึ่งสถานะก็จะเปลี่ยนไป ดังนั้นอิเล็กตรอนหนึ่งๆ จะบรรจุอยู่ได้เพียง 1 สถานะ และทุกอิเล็กตรอนจะต้องอยู่ในสถานะที่ต่างกันแสดงว่าในออร์บิทัลหนึ่งซึ่งมีเลขควอนตัม n, l , และ m_l เพียง 1 ค่า ก็จะมีค่า m_s ได้ 2 ค่า นั่นหมายความว่าในออร์บิทัลหนึ่งๆ สามารถมีได้ 2 สถานะ จึงสามารถบรรจุอิเล็กตรอนอยู่ได้อย่างมาก 2 อิเล็กตรอน

บทสรุป

การอธิบายพฤติกรรมของระบบจุลทรรศน์ด้วยฟิสิกส์แผนเดิมประสบความสำเร็จพอสมควร จึงเกิดทฤษฎีควอนตัม ที่มองลักษณะของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า เป็นระบบที่ไม่ต่อเนื่อง เรียกว่า ควอนตัม ได้ ความสัมพันธ์ ที่สำคัญ คือ $E = h\nu$ สามารถใช้อธิบายปรากฏการณ์บางอย่างได้เป็นอย่างดี เช่น การแผ่รังสีของวัตถุดำ ปรากฏการณ์โฟโตอิเล็กทริก ต่อมาได้มีการนำเอาทฤษฎีควอนตัมร่วมกับทฤษฎีคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าของแมกซ์เวลล์ เกิดแนวคิดใหม่ เรียกว่า กลศาสตร์คลื่น ซึ่งมีสมการสำคัญ คือ สมการของชเรอดิงเงอร์ ที่นำมาใช้อธิบายพฤติกรรมของระบบจุลทรรศน์ได้เป็นอย่างดีในปัจจุบัน

แบบฝึกหัด

1. โลหะชนิดหนึ่งมีค่าฟังก์ชันงาน 1.5×10^{-19} J ถ้าฉายรังสีชนิดหนึ่งที่มีความถี่ 1×10^{15} s⁻¹ ไปยังโลหะชนิดนี้ จะเกิดปรากฏการณ์โฟโตอิเล็กทริก หรือไม่ ถ้าเกิดความเร็วมากที่สุดของโฟโตอิเล็กตรอนเป็นเท่าใด
2. จงหาอัตราส่วนของไฮโดรเจนความเร็วของอิเล็กตรอนที่ระดับพลังงานที่ 2
3. จงหาความยาวคลื่นสสารของโปรตอน ที่มีพลังงานจลน์ 2.5 kJ.
4. จงอนุพัทธ์ไปสู่สมการ

$$(\Delta p_x)(\Delta x) \geq \frac{\hbar}{2}$$

เป็น

$$(\Delta E)(\Delta t) \geq \frac{\hbar}{2}$$

5. จากสมการชเรอดิงเงอร์ที่ไม่ขึ้นกับเวลา

$$\nabla^2 \psi + \frac{2m}{\hbar^2} (E - U) \psi = 0$$

จงแสดงว่า โมเมนตัมเชิงเส้นในกลศาสตร์ควอนตัมเป็นตัวดำเนินการโดย

$$\hat{p} = -i\hbar \nabla$$

6. จงหาความไม่แน่นอนโมเมนตัมของอิเล็กตรอนในกล่องศักย์ 1 มิติ มีความกว้าง 10^{-10} เมตร
7. จากสมการ

$$\frac{m^2}{\sin^2 \theta} \Theta - \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} \left(\sin \theta \frac{\partial \Theta}{\partial \theta} \right) - 1(1+1)\Theta = 0$$

ถ้าให้ $x = \sin \theta$ จงอนุพัทธ์ให้เป็นสมการเลอจองด์สมทบ คือ

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \left[1(1+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] y = 0$$

8. จงอธิบายความหมายคำต่างๆ ต่อไปนี้

ก. ออร์บิทัลเชิงอะตอม

ข. สปิน

ค. หลักกีดกันเพาลี

ง. ฟังก์ชันสมมาตร

จ. คลื่นสสาร

ฉ. Parahelium

มหาวิทยาลัยราชภัฏกำแพงเพชร